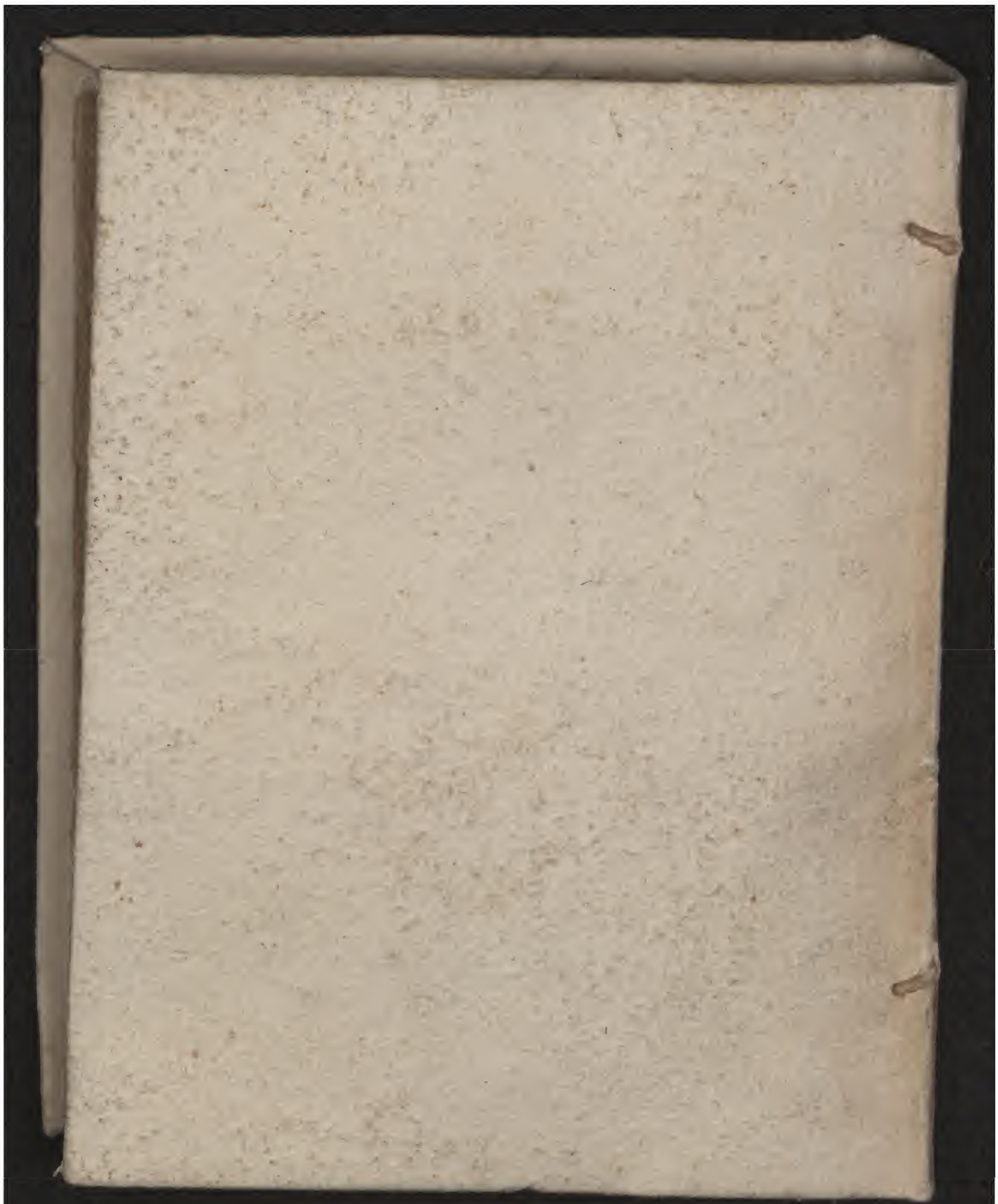




Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL. 1.6.314







Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL. 1.6.314



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL. 1.6.314

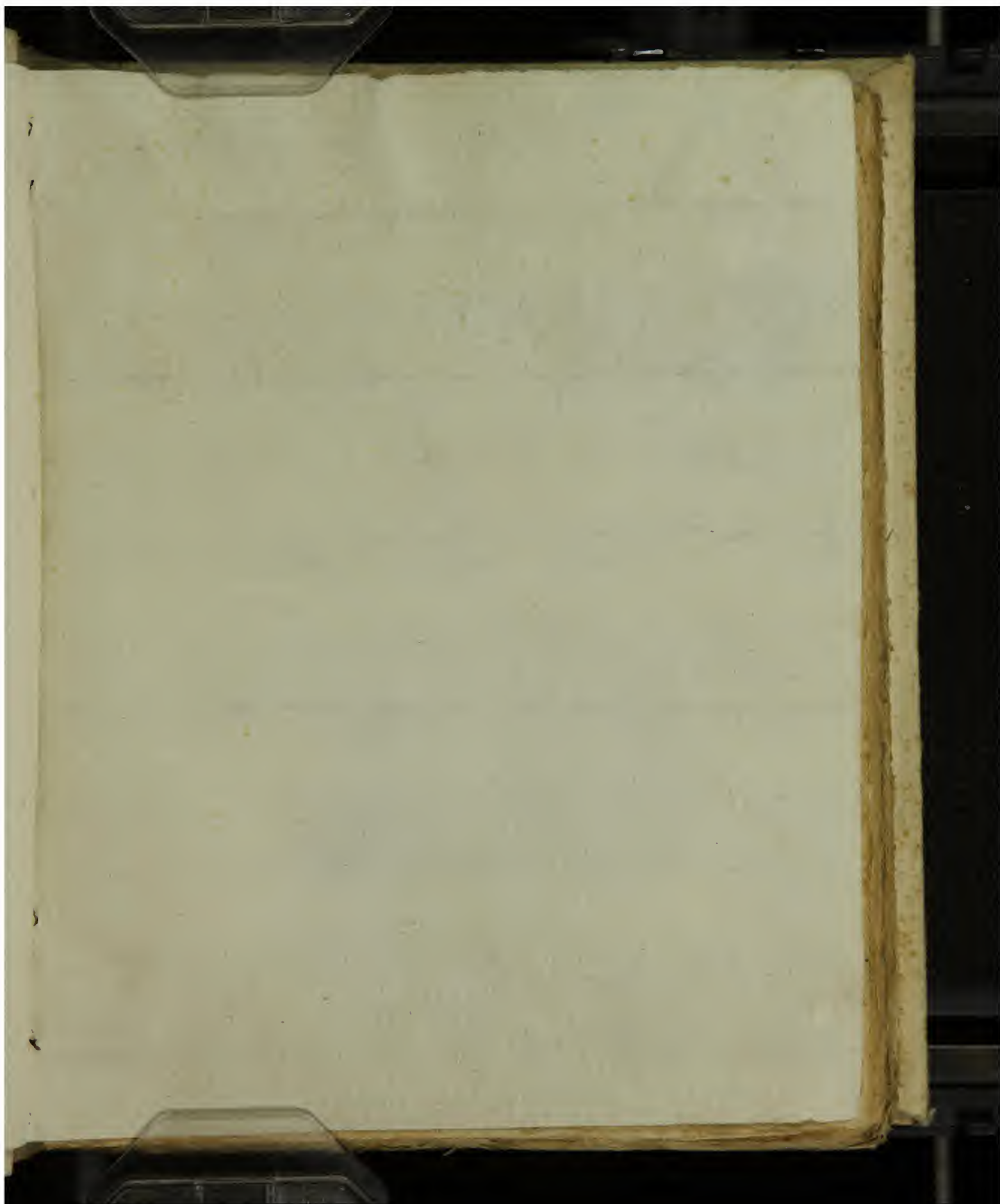




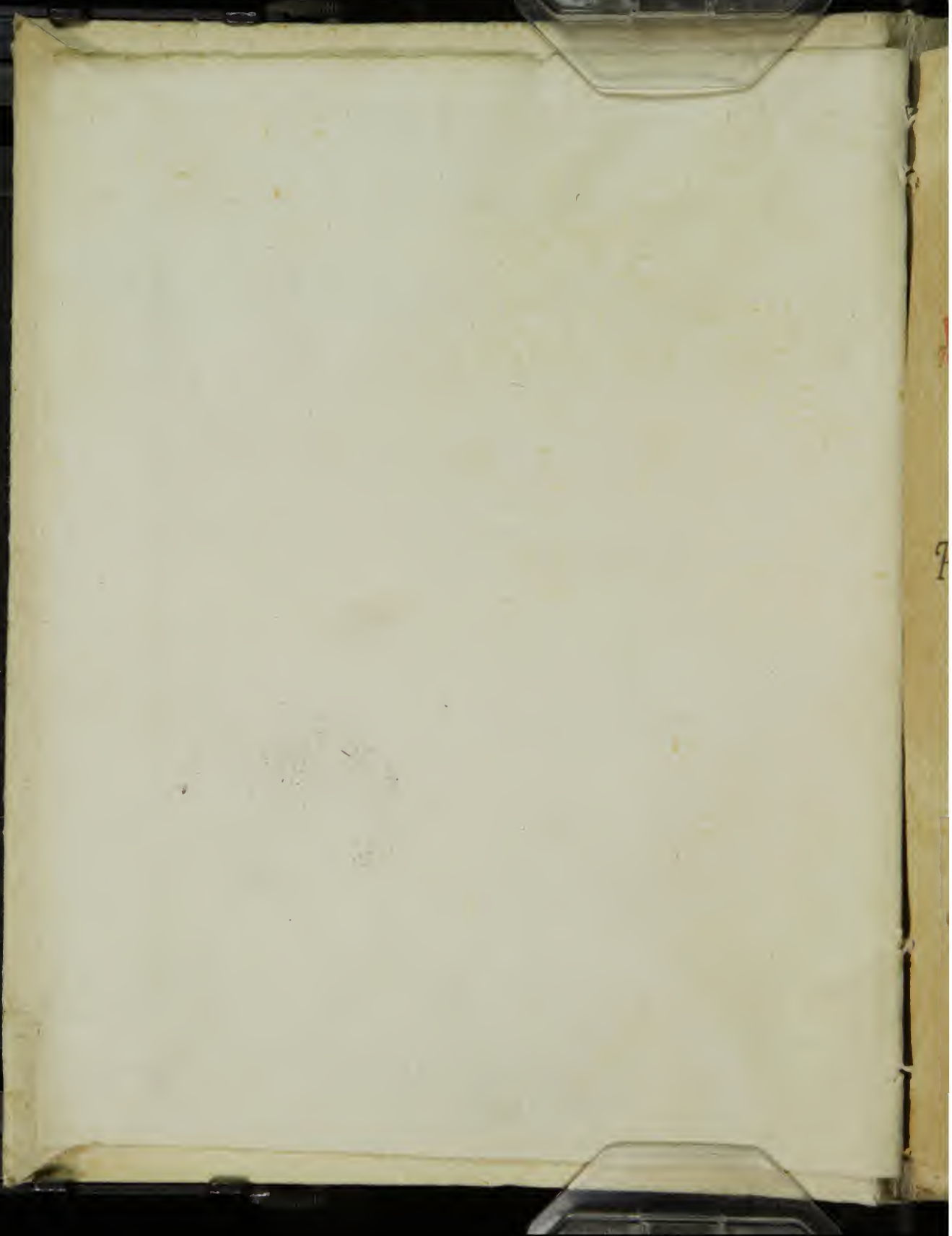
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL. 1.6.314

116

1. 6. 314

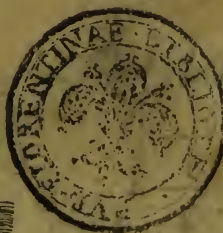






WILHELMI. LANGI  
DE  
VERITATIBUS  
GEOMETRICIS  
LIBRI II.

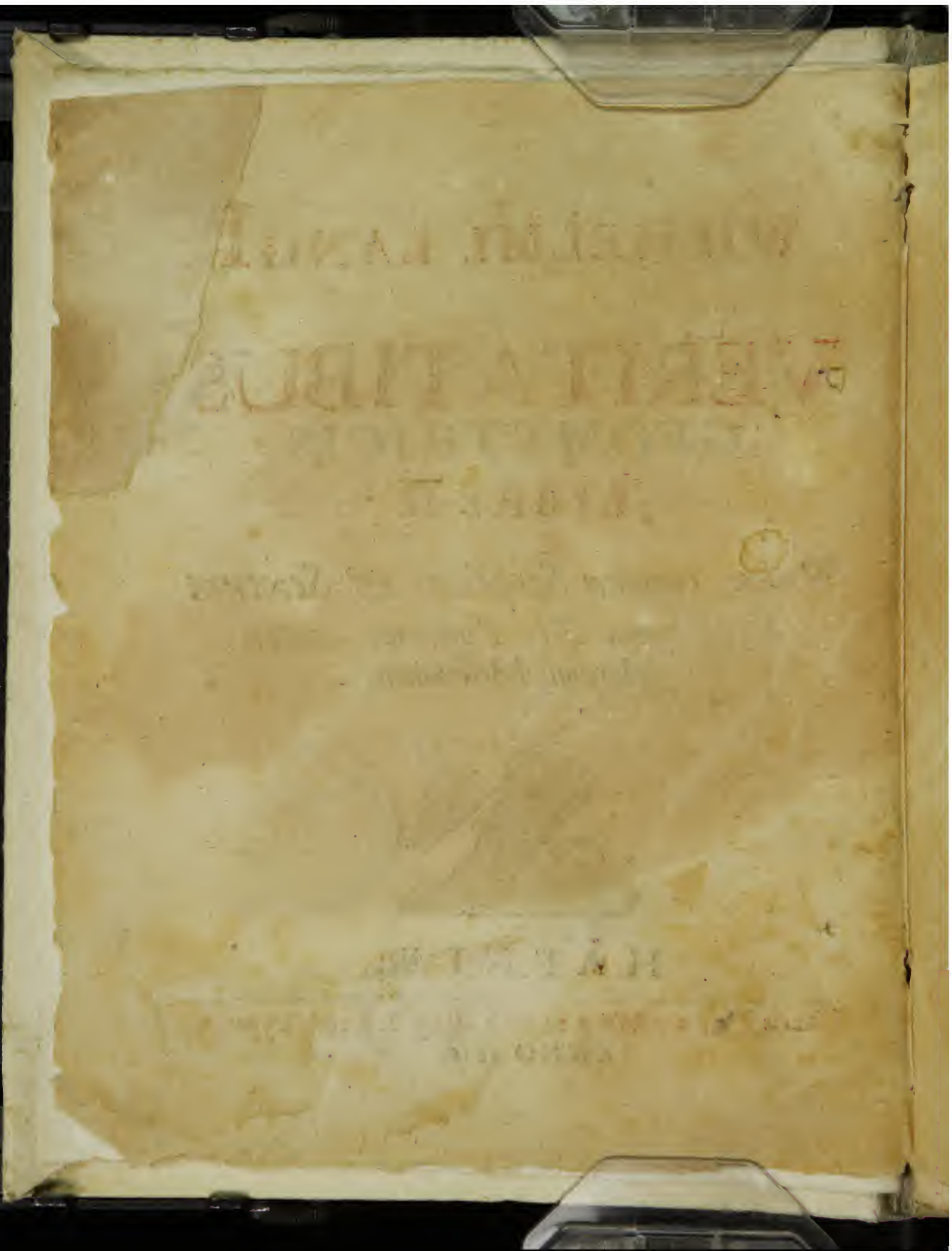
*Prior, contra Scepticos & Sextum  
Empiricum &c. Posterior, contra  
Marcum Meibomium.*



H A F N I Æ,

Literis PETRI MORSINGI, Reg. & Acad. Typogr.  
ANNO 1656.







OPTIMO ATQ; AUGUSTISSIMO  
PRINCIPI  
**FREDERICO III.**  
DANIÆ. NORVEGIÆ. VANDA-  
LORUM. GOTHORUMQ;  
R E G I

DU CI  
SLESVICI. HOLSATIÆ. STOR-  
MARIÆ. DITHMARSIAE

COMITI  
IN  
OLDENBURG. ET. DELMENHORST

REGI. ET. DOMINO. MEO.  
CLEMENTISSIMO

HOS

HOS  
DE  
VERITATIBUS. GEOMETRICIS  
LIBROS

AUGUSTISSIMO. NOMINI. IPSIUS.  
DEBITO. CULTU.  
INSCRIPTOS. DICATOSQUE.

HUMILLIME. OFFERT.

REGIÆ. IPSIUS. MAIESTATIS.  
FIDELIS. SUBDITUS. ET. SERVUS.


WILHELMUS LANGIUS.



IN NOMINE JESU CHRI-  
TI AMEN.

WILHELMI LANGI  
*DE*  
VERITATIBUS  
GEOMETRICIS.  
LIBER I.

CAPUT I.

 Vamquam omnis humana sapi-  
entia perangustis limitibus circum-  
scribatur, ut vix ullus sit mortalium  
qui non in aliquo labatur, quamcunq;  
is demum Philosophiæ partem atti-  
gerit: fatendum tamen est, inter o-  
mnes humanas disciplinas & scientias nullam esse  
quæ firmioribus nitatur fundamentis, quam Mathe-  
sis; nullam, quæ certiora principia magisq; perspicuas  
demonstrariones habeat. Nam cum reliquæ omnes  
circa eas versentur res, quæ partim propter maximam  
subtilitatem atq; obscuritatem cognosci nequeunt;  
partim ob perpetuam mutabilitatem certis scientiæ  
legibus non tam facile adstringuntur: Mathesis me-  
dium quasi sortita locum, ea considerat, quæ ab sensi-  
bus

A



bus atq; intellectu haud difficulter percipiuntur; mutationibus tamen ita carent, ut scientiæ legibus facile obtemperent. Quod quamvis in aliis Matheſeos partibus non tam clare demonſtretur: tamen in Arithmetiſis ac Geometriſis idipſum adeò manifeſtè deprehenditur; ut nemo qvi veritatem amat iſtarum rerum certitudinem non optime perſpiciat.

In hiſce enim ſcientiis nihil ſupponitur aut pro vero admittitur, niſi qvòd communis omnium hominum ratio, & ipſum illud veritatis lumen ac divinæ auræ particula omnibus innata hominibus, pro vero agnoſcit ac recipit. Unde mirandum quàm maximè eſt, dari aliquos, qui hæc tam certa omnibuſq; cognita impugnatum eant, certiffimasq; veritates comuni hominum intellectu comprobataſ labefactare, & ſi non falſi arguere, ſaltem in dubium vocare conentur. Equidem non me fugit etiam Mathematicos in ſuis aliquando demonſtrationibus labi atq; errorem committere, (qvòd tamen non ipſi ſcientiæ, ſed obnoxio erroribus homini vitio verti debet) quem tamen vel ipſemet vel alius qvicumque, mòdò omnia accuratè examinaverit, facile detegit. Quid, qvòd plerumq; error vel in verbis omiſſis malève intellectis, vel in prava demonſtrandi methodo conſiſtat, reſq; ipſa ſit veriſſima: ideoq; facile ab aliis demonſtretur. Et hoc quidem modo multi in ipſo Euclide, què Geometrarum principem jure qvis appellaverit, varia emendarunt, partim verbis omiſſa aut depravata,

ta, partim etiam male demonstrata. Quibus sane non ipse tantum Euclides, sed & tota posteritas plurimum debet. Sic Ptolomæus XXIX. propositionem Primi. Element. non satis accurate ab Euclide demonstratam, certiori via demonstrare aggressus est; quod alii & ante & post ipsum Mathematici etiam attigerunt. In propositione vero XVI. libri primi, ommissa à malis librariis verba *μῖας τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης* vel ut Proclus legit *μῖας πλευρᾶς προσεκβληθείσης* recte cæteri Geometræ reposuerunt; ne idem aliis eveniret quod Philippo Mathematico, qui referente Herone Mechanico hinc anam traducendi Euclidem arripuit; ut est apud Proclum Lib. III. in I. Elem. Euclidis. Horum igitur labores laudem & gloriam merentur; cæterorum vero studia vituperio potius digna: qui sincerum vas incrustare cupientes, optimas ac certissimas demonstrationes partim falsitatis accusant, partim ut nimis accuratè demonstratas irrident: quod superioribus seculis à Epicureis & Scepticis factum fuisse legimus; quorum tamen majorne harum rerum ignorantia an ambitio fuerit vix quisquam dixerit. Cum multis quidem hominibus ita comparatum est, ut plus aliis sapere videri velint: cumq; sciant, magnam iis gratiam laudemq; ab omnibus deberi, qui ignotas veritates in lucem protulerint, boniq; aliquod homines docuerint, quod antea ignorarunt: hi quandoquidem abstrusas invenire nequeunt, cognitæ veritates eversum eunt; & quamvis claras ac perspicuas

A 2

va'



variis tamen sophismatibus obscurare conantur; per-  
versa via gloriam sectantes. Fateor quidem hos ipsos  
verbis veritatē crepare, magnaq; voce profiteri se ni-  
hil præter veritatem quærere: cum tamen re & opere  
monstrent se eandem odio prosequi & diligenter fu-  
gere. Qui si ignorantia peccarent; commiseratione  
quidem digni forent: eo tamen culpandi, quod ea-  
rum sibi rerū scientiam arrogent, quam non habent.  
Nunc vero, cū in rebus manifestis labantur; atq; ob-  
firmato animo veritatem despiciant; eosq; convitiis  
proscindant, qui rectiora tradunt: minimè sunt fe-  
rendi.

Atq; horum ego in numero Marcum Meibomium  
ponere nollē, Virum cætera doctissimum & in utraq;  
literatura tam Græca quam Latina probè versatum,  
mihiq; amicum; nisi ipsemet vel inter primos locari  
voluisset, editoq; heic publice scripto, omnibus  
Geometris novis veteribusq; errorem atq; ignoran-  
tiam objecisset. Libro enim de proportionibus pagi-  
na 9. totius scripti sui rationem verbis sane magni-  
ficis sed vana quadam jactantia plenis exponit. *Itaq;  
ait & recentiores omnes reprehendam, qui antiquos non  
intellexerunt; Et antiquos corrigam, qui malè quæ-  
dam prodiderunt; Utrosq; insuper nova docturus.*  
Ubi vero ad probationes & rem ipsam ventum est:  
tum vero declarat vel se nihil in his disciplinis per-  
spicere; vel aliis splendide imponere velle. Quæ e-  
nim proponit vera & sana, ea omnibus Geometris  
non



non tantum cognita sunt, sed & longe meliori modo antea à multis tradita. Cætera vero quæ attingit, perabsurdis plane principiis, & quæ vix ipse Meibomius, apud peritos homines pro suis agnosceret, nituntur. Et quod pessimum est, ignorantiam earum rerum novis antiquisque Mathematicis objicit, quæ ipsis erant notissimæ. Nam & compositionem rationum in lineis tam ineffabilibus quam effabilibus adeo clare & perspicue tradiderunt; ut Meibomii Methodus multo sit intricatior. Id quoque, quod Theon aliisque Mathematicis exprobrat, eos non intellexisse quid veteres per duplam, triplam, quadruplæve rationem rationis intelligerent, quidve voces ποσότης & πηλικότης propriè significarent; plane falsum est: ut propterea tantam hominis audaciam mirari satis nequeam; qui, ut alios accuset, propriam existimationem in discrimen adducere non veretur. Nempe memoria fortè tenebat illud Juvenalis Satira. XIII.

*Nam cum magna malæ superest audacia causæ:  
Creditor à multis fiducia.*

Sed neque novi quicquam invenit Meibomius, de quo, in Geometria gloriari possit: nisi id forte dogma tale censendum est, quod contra Euclidem omnesque Geometras proponit, *duplam nempe rationem dimidiæ rationi esse æqualem; Et triplam, subtriplex.* Quod quidem, alio axiomate non minus falso confir-

A 3

mat,

mat, si duarum rationum termini æqualem habuerint distantiam ab æqualitate tum ipsas rationes esse æquales. Quæ omnia falsa sunt ac frivola. Quoniam vero hæc paulo accuratius examinare animus mihi est; arbitrabar rectè me facturum, si etiam ea breviter pro ratione scripti hujus attingerem, quæ allicujus momenti contra veritates Geometricas, ac sigillatim contra Euclidem ab aliis sunt prolata. Et cum Sceptici atque inter hos Sextus Empiricus ipsa fundamenta Geometriæ evertere conatus sit; pauca primum de ipsius sententia dicemus: inde Epicureorum objectiones expendemus: ac tum Marci Meibomii argumenta examinabimus. Ne vero tantum Euclidi favisse videamur ut veritati ea propter quicquam detractum vellemus: quædã etiam eorum, quæ male ab Euclide sunt demonstrata, aut perperam definita, in medium adducemus: & quomodo rectius demonstrentur explicabimus. Faveat æterna veritas, nobisque omnibus veritatis amorem inspiret.

## CAP. II.

Inter varias Philosophorum sectas, mirabilis quædam erat Scepticorum seu Pyrrhonorum, qui de omnibus rebus dubitabant; neque sensui, neque intellectui ullam fidem habebant; eo quod aliquando falli utrosque viderent. Auctor hujus Pyrrho Eliensis, de quo hæc tradit Diogenes Laertius ex Ascanio Abderita & aliis; quod nihil turpe aut honestum esse arbitraretur, nihilque justum aut injustum; sed tantum ex hominum



nū constitutione quædam talia cenferi. Verba Diogenis Laertii in vita Pyrrhonis adscribā. ἔδεν γὰρ ἑφασκεν ἔλε  
καλὸν ἔλε αἰχρὸν· ἔλε δίκαιον, ἔλε ἀδίκον· καὶ ὁμοίως ἐπὶ πάντων,  
μηδὲν εἶναι τῇ ἀληθείᾳ, νόμος δὲ καὶ ἔθει πάντα τὰς ἀνθρώπων πρά-  
τειν· ὁ γὰρ μᾶλλον τὸδε ἢ τὸδε εἶναι ἔχασον. ἀκόλαστος δ' ἦν καὶ τῷ  
βίῳ μηδὲν ἐκτρέπόμενος μηδὲ φυλαττόμενος, ἀπαντα ὑφιστάμενος  
ἀμάξας εἰ τύχοι, καὶ κρημνὸς καὶ ὅσα τοιαῦτα, μηδὲν τῶν αἰδή-  
σεων ἐπιτρέπων. ὥζεσθαι μὲν τοὺς ὑπὸ τῶν γνωρίμων παρακο-  
λαθόντων. *Negabat quicquā turpe esse aut honestum; ju-  
stū aut iniustum: eadē ratione in omnibus nihil vere esse,  
cæterum lege atque consuetudine cuncta homines facere.  
Neq; enim esse quicquam illud potius quam istud. Con-  
sentanea illi adhæc & vita erat; nihil declinans nihilq;  
devitans, sustinebat currus, si forte occurrissent, & præ-  
rupta & canes & talia, nihil omnino sensibus per mit-  
tens. Servabatur autem à sequentibus se necessariis*  
Enim vero cum nihil natura malum, hominive noxium  
diceret, sed tantum ex opinione ita videri: oportebat  
cum qui Philosophum agere vellet, factis declarare,  
quod verbis asserebat; ideoque nec currus vitare, nec  
incurfantes canes. Cæterum verbis quidem hanc i-  
psam Philosophiam tradidisse, & τὸ ἐπέχειν proposuisse;  
re vero & opere quædam pro malis habuisse, Ænefi-  
demus aliiq; apud eundem Laertium tradunt. Nam  
cum aliquando canem sibi incurfantem repulisset.  
eamq; ob rem à quodam argueretur, quod doctrinæ  
suar



suæ contraria faceret : respondit ὡς χαλεπὸν ἐπιόλοχε-  
 ρῶς ἐκδύναι ἄνθρωπον· διαγωνίζεσθαι δὲ ὡς οἷόν τε, πρῶτον μὲν  
 τοῖς ἔργοις πρὸς τὰ πράγματα· εἰ δὲ μὴ, τῷ γε λόγῳ.

*Quod perdifficile esset hominem penitus exuere. Cer-  
 tandum vero quantum quidem fieri posset, primum qui-  
 dem operibus adversum res : sin minus ; saltem ratione.*  
 Verum in hisce non opus erat hominem exuere. Si  
 enim revera malum non erat quod fugiebat : neq; o-  
 pus erat ejus causa hominem exuere. Sed volebat ali-  
 quid dicere; ne aliud verbis docere, aliud re præstare  
 videretur. Ista ergo secta nullam sapientiam nul-  
 lamque scientiam profitebatur : sed cæterorum qui-  
 dem sapientum dicta evertibat; tota autem ipsius  
 scientia in eo consistebat, quod nihil sciret. Quoniam  
 vero hujus sectæ homines id unicum in omnibus qua-  
 rebant, ut omnes scientias destruerent : ne Matthesin  
 quidem intactam relinquere poterant, cujus tam cla-  
 ræ veritates, tam certæ demonstrationes. Hanc ergo  
 scientiam ut etiam everterent, varia conquisiverunt,  
 quæ tamen talia sunt ut ab nemine sano admitti  
 possint. In cæteris quidem disciplinis non solum ali-  
 quid probabile adferunt; sed etiam aliquando verissi-  
 ma produnt. sicut quando disputant contra Astrolo-  
 gos aliosque. Sed quæ contra Geometriam proferunt  
 ea plane absurda, & communi hominum rationi, a-  
 deoque ipsi veritati contraria. Quod ut clarius pateat  
 Sexti Empirici librum III. contra Mathematicos  
 qui

qui inscribitur contra Geometras discutiemus. Priores enim duo, Mathematicos proprie dictos non tangunt: prior enim scriptus est contra Grammaticos, secundus autem contra Rhetoras; sicut neque posteriores, præter solum quartum, qui est contra Arithmeticos. Quæ enim contra Musicos & Astrologos libro V. & VI. proponit potius aliò sunt referenda. Hujus igitur viri argumenta nunc examinemus.

## CAP. III

Primum quod in Geometris accusat Sextus Empiricus est, quod ad res suas demonstrandas utantur hypotheseis. Ita enim librum III. inchoat. Επειὶ οἱ Γεωμέτραι συνορόντες τὸ πλῆθος τῶν ἐπακολουθήσαντων αὐτοῖς ἀποριῶν εἰς ἀκίνδυνον εἶναι δοκῶν καὶ ἀσφαλὲς πρᾶγμα κατὰ φύγην τὸ ἐξ ὑποθέσεως αἰτιῶσαι τὰς τῆς Γεωμετρίας ἀρχάς· καλῶς ἀνέχονται καὶ ἡμᾶς τῆς πρὸς αὐτὴν ἀνιρρήσεως ἀρχὴν τίθεσθαι ὅτι περὶ τῆς ὑποθέσεως λόγον. *Quoniam Geometrae, considerantes multitudinem dubitationum quæ ipsos consequuntur, confugiunt ad rem quæ videtur tuta & remota à periculo nempe ut ex hypothesis petant principia Geometriæ; bene erit si nos quoque contra eos dicendi principium sumamus ex eo quod dicendum est de hypothesis.* Et libro I. in ipsa totius operis præfatione ait hoc figillatim contra Geometras dici quod non oporteat accipere principia ex hypothesis. πρὸς δὲ Γεωμέτραις περὶ τῆς μὴ δεῖν ἐξ ὑποθέσεως λαμβάνειν

B

ταλ



ταὶ ἀρχαί. Explicat vero ipsemet quid per ὑποθέσεις  
intelligat, nempe non tragicam aut comicam hypo-  
thesin quam actuum argumentum vocant; neque  
eam qua Rhetores utuntur, in quaestione singularium,  
sed quae denotat principium demonstrationum,  
ὑποθέσιν καλεῖται ἀρχὴν ἀποδείξεων αἰήσιν ἔσσαν πράγματ' εἰς  
κατασκευὴν ἔχον. *Hypothesin vocamus principium de-*  
*monstrationum petitionem rei ad aliquid probandum.*  
Sed cū tria principiorum genera Geometrae habeant,  
variāq; sub nomine hypotheseos comprehendantur  
ab hoc Auctore non explicata, ex mente ipsorum Geo-  
metrarum hanc vocem exponemus. Proclus ergo com-  
mentario secundo in 1. Element. Euclidis, pag. 22.  
hæc de principiis Geometriae juxta Euclidem tradit.  
Ἐπειτα καὶ αὐτὰς διαρεῖ (ὁ Ἐυκλείδης) τὰς κοινὰς ἀρχὰς  
εἰς τὰς ὑποθέσεις καὶ τὰ αἰτήματα καὶ τὰ ἀξιιώματα. δια-  
φέρει γὰρ ταῦτα πάντα ἀλλήλων, καὶ ἕκ ἐκ τούτων ἀξίωμα  
καὶ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις, ὃ πρὸς Φησὶν ὁ δαμόκριτος Ἀριστοτέλης.  
ἀλλ' ὅταν μὲν καὶ τῷ μαθητῇ γινώσκοντι, καὶ κατ' αὐτὸ πι-  
στὸν παραλαμβάνομενον εἰς ἀρχὴς τίξω, ἀξίωμα τὸ τοιούτῳ  
ἴστω, οἷον, Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. Ὅταν δέ  
μὴ ἔχῃ μὲν ἔννοιαν ὁ ἀκούων τῆς λεγομένης τὴν αὐτίστο, ἴδεταί  
δὲ ὅμως καὶ συγχωρεῖ τῷ λαμβάνοντι τὸ τοιούτῳ ὑπόθεσις εἶναι.  
Τὸ γὰρ εἶναι τὸν κύκλον σχῆμα τοῖόνδε, κατὰ κοινὴν μὲν ἔννοιαν  
ὃ ἀποειλήφμεν ἀδιδάκτως. ἀκούσαντες δὲ συγχωροῦμεν ἀπο-  
δεί-



δείξεως χάρις. Ὅτε δὲ αὐτὰ ἀγνώσκον ἢ τὸ λεγόμενον, καὶ μὴ  
 συγχωρῶντες τῷ μανθάνοντι ὅμως λαμβάνεται· τὴν καὶ  
 φησὶν ἀίημα τῷ καλῶμεν, οἷον ὅτι πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι  
 ἴσαι εἶναι. Quæ ita verto. Deinde ipsa quoque commu-  
 nia principia dividit (Euclides) in hypotheses, postu-  
 lata & Axiomata. Differunt enim hæc invicem, neq;  
 idem sunt Postulatum, Axioma & Hypothesis, sicut et-  
 iam divinus Aristoteles alicubi docet. Quando enim  
 id quod pro principio assumitur, & discenti notum est,  
 & per se manifestum ac fide dignum: tum Axioma id  
 vocatur. quale illud est: Quæ eidem sunt æqualia et-  
 iam inter se sunt æqualia. Cum vero auditor, cognitio-  
 nem per se claram & certam non habuerit ejus quod dici-  
 tur; ponit tamen unà id ipsum & concedit assumentem:  
 tum hypothesis est. Nam quod circulus talis sit figu-  
 ra, non quidem per communem notionem sine omni do-  
 ctrina percipimus: quando vero id audimus statim  
 concedimus absq; demonstratione. Quando autem id  
 quod dicitur, neque cognitum fuerit auditori, neque ab  
 ipso concessum, & tamen assumitur; tum illud postula-  
 tum dicimus. sicut illud, omnes rectos angulos invicem  
 esse æquales. Et hæc quidem ita explicari ait ab Ari-  
 stotele; alios vero non tam accuratè hæc distingvere.  
 Καὶ κατὰ μὲν Ἀριστοτέλους ὑφ' ἡγιστὶν τοῖς διώριστα τὸν τρό-  
 πον Ἀξίωμα καὶ Αἰήμα καὶ ὑπόθεσις. Πολλάκις δὲ καὶ ταῦ-  
 τα πάντεσσι καλέσιν ὑποθέσεις, ὥς περ οἱ ἀπὸ τῆς Σίλοῦς Ἀξίωμα

πᾶσαν ἀπόφασιν ἀπλὴν ὥστε καὶ μὲν τὰς καὶ αἱ ὑποθέ-  
 σεις Ἀξιώματα. καὶ δὲ τὰς εἰρέας καὶ τὰ Ἀξιώματα ὑποθέσεις.  
*Et secundum Aristotelis quidem sententiam hoc modo*  
*differunt Axioma Postulatum & Hypothesis. Sæpe*  
*autem & hæc omnia vocantur Hypotheses, sicut o-*  
*mnis simplex affirmatio Stoicis Axioma dicitur. Adeoq;*  
*his quidem ipsæ quoque Hypotheses Axiomata sunt:*  
*aliis vero ipsa quoq; Axiomata sunt Hypotheses. Atq;*  
 hæc ultima verba diligenter sunt consideranda. neq;  
 enim optimi Scriptores Geometræ hanc Hypothe-  
 seos distinctionem accurate observant. Aristarchus  
 quidem Samius in libro. Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀπο σήματων  
 Ἡλίου τε καὶ Σελήνης. *de magnitudine & distantia, Solis*  
*& Lunæ* (quod unum ex omnibus ipsius scriptis super-  
 esse arbitror) aliter voce Hypotheseos videtur usus  
 fuisse: quem quidem scriptorem magni sane nominis  
 summæque auctoritatis Latine à se versum edidit Fe-  
 dericus Commandinus vir de tota re Mathematica  
 præsertim vero de antiquis Geometris optime meri-  
 tus. Græcum vero textum ex tribus bonæ notæ Co-  
 dicibus MSS. Bibliothecæ Regiæ Parisiensis exscri-  
 psi, quorum copiam, sicut & aliorum omnium tam  
 Regiæ quam propriæ Bibliothecæ MSSorum mihi fo-  
 cerunt Clarissimi & nunquam satis laudati Viri Petrus  
 & Jacobus Puteani, quibus sane ergo ob id alia-  
 que in me collata beneficia plura me debere fateor  
 quam præstare possim. Is scriptor principio operis  
 sui



fui à me nunc laudati sex Ὑποθέσεις ut ipse vocat præmittit, ex quibus sua demonstrare vult: quas omnes adscribam, ut eo rectius judicari possit quid per vocem ὑποθέσεως intelligat.

Ὑποθέσεις 7. Α. Τὴν Σελήνην παρὰ τῷ Ἡλίῳ τὸ Φῶς λαμβάνειν. Β. Τὴν Γῆν σημείου τὸ κέντρον λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τῆς Σελήνης σφαῖραν. Γ. Ὅταν ἡ Σελήνη διχότομος ἡμῖν φάνηται, νέμειν εἰς τὴν ἡμετέραν ὅσον τὸν διόριζον τὸ τε σκοτεινὸν καὶ τὸ λαμπρὸν τῆς Σελήνης μέγιστον κύκλον. Δ. Ὅταν ἡ Σελήνη διχότομος ἡμῖν φάνηται, τότε αὐτὴν ἀπέχειν τῷ Ἡλίῳ ἑλασσιν τετρατημορίσ, τῷ, τῷ τετρατημορίσ τριακοσῷ. Ε. Τὸ τῆς σκιάς πλάτος σεληνῶν εἶναι δύο. 7. Τὴν Σελήνην ὑποτείνειν ὑπὸ πέντε καὶ δεκάτῃ μέρει ζώδιος.

*Hypotheses sex. I. Lunam à Sole illuminari. II. Terram ad Lunæ Sphæram puncti & centri rationem habere. III. Quando Luna bisecta nobis apparet, tum quidem maximum in ea circulum qui lucidum ab obscuro determinat, versus nostrum aspectum inclinare. IIII. Quando Luna bisecta nobis apparet tunc abesse illam à Sole minus quadrante circuli, parte quadrantis trigesima. V. Latitudinem umbræ duarum esse Lunarum. VI. Lunam subtendere quintamdecimam partem signi. Ex his Aristarchi verbis liquet neque eum in generali sensu usum fuisse voce ὑποθέσεως quo ipsa quoque axiomata comprehendit; neque speciali, pro*



iis quæ demonstrari quidem nequeunt; conceduntur tamen ab auditore sed per ὑποθέσεις id præcipue indicasse quod Proclus ex mente Aristotelis vocat postulatum. Neque enim vel prima vel secunda vel tertia hypothesis aut certius cognita est ex se, aut facilius à quoquam admissa, quam illud, *Omnes anguli recti sunt inter se æquales*. Posteriores vero tres hypotheses etiam falsæ sunt, quod ex nostri temporis observatis liquet. Neque enim Luna in quadraturis tricesimam partem deficit à quadrante, neque sua diametro quintamdecimam partem signi seu duos gradus subtendit. quæ omnia ex fallacibus observationibus dependent. Hypothesis igitur Aristarcho idem est quod Ἀίτημα sive postulatum Aristoteli. Sed neq; Archimedes ipse voces has tam accurate distingvit. Libro enim I. de Sphæra & Cylindro, dicit primum se ponere πῶτε Ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν, *Axiomata & ea quæ assumuntur ad horum demonstrationem*. Recenset vero partim definitiones quasdam, partim etiam hypotheses. Omnibus autem recensitis hæc demum verba subjungit Τῶν δὲ ὑποκειμένων *His ita suppositis*. Vocat ergo suppositiones id quod antea axiomata appellaverat. Libro vero primo *æquipondantium*, ea quæ illeic axiomata dixerat, hæc postulata vocat; & tamen hypotheses. Adeo ut hypothesis Archimedi sit omne illud quo ad demonstrandum aliquis quocunque modo utitur, non demonstrato. Vide

de Præfationem ipsius in librum de Conoidibus & Sphæroidibus ad Dositheum. Hanc ergo ob causam Sextus quoque Empiricus per ὑποθέσεις Geometrarum intelligit omne id quod supponunt non demonstratum, tam definitiones & postulata, quā Axiomata. Quoniam vero omnes scriptoris hujus cavillationes ex male vel intellecta vel usurpata voce hypotheseos fluant, operæ precium erit accuratius eam explicare. Præter eas ergo significationes quas Sextus recenset, denotat hypothesis thesīm aliquam cujus una pars vera est, altera falsa. Aristoteles Analyt. Posterior. lib. I. c. 2. θέσις δὲ ἢ μὲν ὁποτέρων τῶν μορίων τῆς ἀποφάνσεως λαμβάνεται (οἷον λέγω τὸ εἶναι πῖ εἰ μὴ εἶναι πῖ) ὑπόθεσις ἢ δὲ ἀνευ τῆς ὁρισμῶς. ὁ γὰρ ὁρισμὸς θέσις μὲν ἐστὶ, τίθεται γὰρ ὁ ἀριθμητικὸς μονάδα τὸ ἀδιαίρετον εἶναι καὶ τὸ ποσόν. Ὑπόθεσις δὲ ἔκ ἐστι. Τὸ γὰρ τί ἐστὶ μῆκος, καὶ τὸ εἶναι μονάδα ἔταυτόν. *Positionis duæ sunt species, una hypothesis dicitur cum alterutra pars enunciationis veluti aut esse aliquid aut non esse sumitur: Altera est definitio in qua neutrum accipitur. Nam & definitio species positionis est. Ponit enim verbi gratia Arithmeticus unitatem esse indivisibilem, & quantum. Nec tamen definitio est hypothesis. Neque enim idem est dicere quid sit unitas, & quod sit. Differt tamen & hypothesis hæc & definitio ab Axiomate, ut hic auctor docet, verbis antecedentibus.* Ἀμέσως δ' ἀρχῆς συλλογιστικῆς θέσιν μὲν λέγω ἢ μὴ ἐστὶ δεῖξαι, μηδ'



μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενον τι. Ἡν' δὲ ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὄντιν μαθησόμενον, ἀξιῶμα. *Principium immediatum argumentationis duplex est. unum quidem thesis dicitur, quod demonstrari non potest, nec tamen necessario verum videtur illi qui hæc discere cupit. Si vero necessario verum fuerit Axioma appellatur.* Capite vero libri hujus VIII. ad quem locum sine dubio respexit Proclus discrimen inter Hypothesin & postulatū hoc ponit, quod ea quidem assumatur consentiente illo qui erudiri vult, hoc autem, vel non consentiente vel etiā contrarium sentiente. Ὅσα μὲν ὅν τε δεῖξαι ὅν τε λαμβάνει αὐτὸς μὴ δεῖξας, τῶν τε, ἔαν μὲν δοκῇ τε λαμβάνη τὸ μανθάνοντι, ὑποκρίθεται· καὶ ἔστιν ὅχι ἀπλῶς ὑπόθεσις, ἀλλὰ πρὸς ἐκείνων μόνον. Ἐὰν δὲ ἢ μηδὲ μᾶς ἐνέστις δόξης, ἢ καὶ ἐναντίας ἐνέστις λαμβάνη· το αὐτὸ αἰεῖται. Καὶ τῶν διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα. *Quando vero aliquis ea assumit quæ alibi sunt demonstrata, neque ipsemet ea demonstrat; tūm si quidem discenti eadem probentur, supponere ista dicitur: si vero ea assumat quæ discenti vera non videntur, aut quorum contraria potius videntur; tūm postulare dicitur. Et hac re differt postulatū ab Hypothesi.* Differunt ergo inter se hæc quatuor. Axioma, Definitio, Hypothesis, Postulatū. Prius enim demonstrari quidem non potest, necessario tamen verum esse deprehenditur. Alterum autem necessario pro vero non recipitur; sicut neque tertium; quæ eo quidem inter se diffe-



differunt, quod hoc alterutram enuntiationis partem admittat : illud vero simpliciter aliquid definiat : ambo tamen hoc à quarto distinguuntur, quod ista quidem consentiente auditore assumantur, hoc vero, ne quidem consentiente. Quæ ut rectius intelligantur, Geometricis exemplis hæc omnia exponemus. Supponit Geometra dari longitudes, latitudines, & profunditates. & longitudes quidem posse concipi sine latitudine, ac tum lineam vocat talem longitudinem ; tum quoq; eandem longitudinem posse considerari cum latitudine, sed sine profunditate, quam quidem superficiem appellat. Si vero omnes tres dimensiones considerentur corpus hoc appellat. Supponit etiam posse superficiem varias figuras constituere, vel circularem, vel quadratam, vel aliam quamcunque. Si ergo quis hæc negaret, utique diceret Geometra, vel longitudo est, vel non est. Si non est, ergo omnes res una coherent, ac inter nullas datur discrimen aut interval- lum, imo omnia unum punctum constituunt. Cum ergo hæc falsa sunt atque absurda, patet longitudes ac latitudines esse, adeoque & lineas & superficies & circulos & sphaeras cæteraque omnia. Hæc ergo ex hypothesi posita dicuntur, cujus tamen hypotheseos nullus Mathematicorum meminit, quod de his neminem ipsis litem moturum confidant, adeoque hac in re vel ipso Sexto Empirico teste recte faciunt Geometræ quod hujus hypotheseos nullam mentionem faciant. Verba ejus sunt dicto libro.

C

Kou

Καὶ μὴν τὸ ὑποκείμενον πρᾶγμα ἢ ἔστι ἀληθές ἐστι καὶ τοιῶτον, ὁ-  
ποῖον αὐτὸ ὑποκείμεται, ἢ ψεύδος. Ἀλλ' εἰ μὲν ἀληθές ἐστι,  
μηδὲ αἰσώμεθα αὐτὸ, εἰς πρᾶγμα ὑποψίας πλῆρες κατὰ Φεύ-  
ρονες τὴν ὑπόθεσιν, ἀλλ' αὐτὸν λαμβάνωμεν, ἐπεὶ περ ὅδεῖς τ'  
ἀληθὴ καὶ ὅντα ὑποκίθεται, κατὰ περ ὅδε τὸν ἡμέραν εἶναι, ἢ ἐμὲ  
διαλέγεσθαι καὶ ἀναπνεῖν, ἢ γὰρ περιφάνεια τῶν τῶν πραγμάτων  
αὐτὸν βέβαιον ἔχει τὴν θέσιν, καὶ ὁ διασφαζομένην τὴν ὑπόθεσιν.

*Res enim quæ supponitur vel vera est & talis qualis sup-  
ponitur vel falsa. Quod si vera, ne eam petamus, neque  
ad rem suspitione plenam confugiamus nempe hypothe-  
sin, sed ipsam ex seipsa assumamus: quandoquidem ve-  
ra & quæ vere existunt nemo supponit, sicut diem nunc  
esse aut me discurrere vel respirare. quoniam enim hæc ma-  
nifesta sunt per se etiam firmā habent demonstrationem,  
non vero dubiam hypothesin.* Et sane dari longitudi-  
nes & latitudines adeoque lineas & superficies, tam  
certum est quam diem nunc esse, aut nos respirare. Et  
hæc quidem hypotheses vocari possent. Nec tamen  
Geometræ illas hypotheses intelligunt quando tales  
nominant, sed longe alias de quibus postea.

Quoniam ergo apud omnes in confesso est lineas,  
superficies ac cæteram Geometriæ materiam dari, ne  
devocibus litigium oboriatur, voces suas primum ex-  
plicant Geometræ, quibus singulas res nominant quæ  
in Geometria considerantur. Oportebat enim eos  
qui verissima prodere vellent & omnibus clara, illam  
quoque difficultatem tollere quæ ex ignoratis scien-  
tiæ



tia terminis oboriri posset, ac semel certo constituere, quæ nam res singulis verbis indicaretur, ne id quod de circulo demonstraretur alius de parabola propositum crederet; aut quod triangulo Isosceli conveniret, cuivis triangulo applicaret. Definitiones igitur in Geometria nihil aliud sunt quam vocum ac terminorum explicationes, quid nempe & quas res Geometræ talibus vocibus denotent. Sunt vero hæ simplices positiones, non quidem necessario veræ sed quas nemo non concesserit. Ut verbi gratia Triangulum est figura tribus lateribus & tribus angulis constans. Simplex hæc assertio est nullam partitionem habens. Necessario quidem vera non est. Neque enim tam evidenter patet Triangulum talem esse figuram, ac bis bina esse quatuor. Nemo tamen talem superficiem quæ tribus lateribus & tribus angulis clauditur, triangulum esse negaverit, nemo non concesserit hanc rem ita appellari posse.

Axiomata vero in Geometria necessario vera sunt. Ut quæ eidem æqualia etiam inter se esse æqualia. Et æqualia æqualibus addita tota facere æqualia. Hæc enim necessario vera sunt, de quibus omnes homines, etiam cæcus qui dignoscere non potest utrum nox an dies sit, certo pronuntiant hæc verissima esse.

Postulata vero & petitiones ad constructionem diagrammaton sunt necessaria. Ideoque sive auditor ista mihi concedat, sive non, ego tamen id mihi sumo. Si enim Propositionem quandam demonstraturus co-

C 2

piam

piam peterem ducendi lineam v. g. à puncto A. ad punctum B. si auditor id mihi negaret, ego tamen id facerem meamque demonstrationem perficerem, cum ego æqua peterem, is vero inique ageret quod iusta petenti non concederet.

Sunt vero præterea quædam alia apud Geometras quæ supponuntur sæpenumero falsa, ex quibus tamen ut veris argumentor. Ut v. g. demonstraturus in triangulo quodam rectangulo hypotenusam esse 100 pedum quando basis subtendens 30. gr. fuerit pedum 300. suppono in triangulo v. g. ABC. in figur. n. I. AB. esse 300. pedum: quod tamen verum non est, vix enim octavam aut decimam partem pedis æquat. Sed istud quidem ita fit ob commoditatem demonstrandi. Ipsa autem demonstratio non in ipsis lineis consistit, sed in iis veritatibus, quæ ex claris axiomatibus demonstrantur, ut postea patebit. Atque hæc possunt proprie hypotheses dici. Hisce ita explicatis, nunc ipsius Sexti Argumenta audiamus.

### CAP. IIII.

Primum ergo ipsius argumentum id concludere conatur, nullam demonstrationem aut certitudinem per hypothesein posse haberi. Epilogismo autem tali utitur.

Ἡτοι ἰσχυρὸν ἐστὶ καὶ βέλαιον πρὸς πῖσιν τὸ ἐξ ὑποθέσεως πιλαβεῖν, καὶ ἀπὸ πῖσιν καὶ ἀοθενές. Ἀλλ' εἰ μὲν ἰσχυρὸν, καὶ τὸ ἀντικείμενον ἐξ ὑποθέσεως λαμβάνειν πῖσιν γενήσεται καὶ βέλαιον, ὥστε θήσωμεν τὰ μαχόμενα. Εἰ δὲ, ἐπὶ τῷ τὸ ἐναντίον ἐξ ὑποθέσεως λαμβάνοντος

χω-



χωρίς ἀποδείξεως, ἀπὸ τῶν ἐσιν, ἢ ὑποθέσεως ἀπὸ τοῦ γενήσεαι καὶ ἐπὶ  
ἐκείνῃ, ὥστε ὁ δεύτερον ἀντίαν θέσομεν. Οὐ τοίνυν λιπτόν ἐστιν ἐξ ὑποθέ-  
σεως ἡ. Quæ ita verto ( interpretes enim sicut in plurimis  
aliis locis ita heic quoque auctorem non intellexit, sed  
sensum plane invertit). *Aut validum & fide dignum est  
ex hypothese sumptum argumentum, aut invalidum &  
fide minime dignum. Si validum, ergo & contrarium  
si ex hypothese sumatur verum erit & firmum, adeoque  
pugnantia invicem ponentur. Si vero contrario ex hy-  
pothese posito sine demonstratione argumentatio falsa  
evadit, ergo & alterius hypothesis incredibilis quoque erit.  
ut neutrum sit affirmandum. Nihil ergo accipiendum  
est ex hypothese.* Quæ quoniam non satis clara sunt, non-  
nihil illustrare conabimur. Sexti argnmentum hoc est.  
Modus demonstrandi ex hypothese vel legitimus erit  
verumque inveniet, vel non inveniet. Si non invenit  
verum, rejiciendus plane est. Si invenit, ergo omnis  
argumentatio ex hypothese ducta vera erit. Habet  
autem hypothesis duo membra ut ex Aristotele expli-  
catum, è quibus unam ponitur alterum tollitur. Ve-  
luti in hoc exemplo. Homo vel est animal rationale,  
vel irrationale: sed est rationale, ergo non est irrationa-  
le. Heic demonstratur hominem non esse animal ir-  
rationale ex hypothese. Sumo enim Hominem esse  
animal: Omne autem animal est vel rationale vel ir-  
rationale. Suppono autem esse rationale, quod tamen  
non demonstro. Dicit ergo Sextus, quod si altera pars  
hypotheseos sumatur: tum concludi hominem esse

C 3

ani-

animal irrationale. Si enim dixerim, sed est irrationale. Ergo conclusio erit non esse rationalem. Neutra subsumptio ex demonstratione est, ideoque æque hoc dicere possum ac illud. At vero ultimo hoc modo falsum concluditur. ergo modus argumentandi per hypothesein falsum concludit, ideoque legitimus ac probus non est. Hæc summa est argumenti hujus Pyrrhonicæ. Sed videndum quid contra Geometras concludat. De tali quidem Hypothesi loquitur cujus una pars assumitur, altera rejicitur, quæ etiam propriè & strictè secundum Aristotelem loquendo Hypothesis appellatur. Verum tales Hypotheses Geometria ignorat. Definitiones enim non dicunt lineam esse longitudinem latitudine carentem, vel non esse: sed simpliciter ponunt lineam esse longitudinem. Ita in cæteris definitionibus. Sed neque Axiomata duo membra habent, verum unam rem simpliciter affirmant: quod ipsum quoque in Postulatis contingit. In ipsis quoque falsis hypothesisibus Geometræ simpliciter eam ponunt ex qua argumentantur, ut in triangulo ABC fig. I. ponunt simpliciter lineam AB. 300 pedum. Hoc ergo Sexti argumentum contra Geometras non est, & monstrat se vel Geometricarum rerum plane rudem fuisse, vel insignem rabulam agere voluisse qui conquisitis adeo mendaciis veritatem undique obscurare conetur, cujus generis homines optandum foret ut nostra ætas ignoraret. sed proh dolor nullum seculum hoc facundius. Cupiunt enim homines illudi amante  
que



que eos qui speciosissimis verbis fraudem sibi facere possunt: eos vero detestantur quibus veritas cordi est. Quippe paucissimi sunt qui verā sapientiam amant, pauciores adhuc qui intelligunt. Ideoque sæpe nunc illud pluribus in locis contingit, quod Anacharsis quidam Schyta suo ævo apud Græcos notavit ὅτι λέγουσι μὲν οἱ σοφοὶ πᾶς Ἑλλήσι, κρίνουσι δὲ οἱ ἀμαθεῖς. *quod sapientes quidem proponant apud Græcos: sed indocti iudicium ferant.* Verum frustra deploramus quæ corrigi nequeunt. Ad Sextum nostrum revertamur, qui quidem primo suo argumento nihil contra Geometras evicit. videndum quid aliis præstet. Pergit igitur Καὶ μὴν τὸ ὑποκείμενον πρᾶγμα ἢ ἔστι ἀληθὲς ἔστι καὶ τοιοῦτον ὅποιον αὐτὸ ὑποκείμενα, ἢ ψεῦδος. Ἀλλ' εἰ μὲν ἀληθὲς ἔστι, μὴδὲ ἀλώμενα αὐτὰ, εἰς πρᾶγμα ὑποψίας πλῆρες καταφύγουσιν τὴν ὑπόθεσιν, ἀλλ' αὐτὸν λαμβάνωμεν. ἐπεὶ περ ἔδειξεν τ' ἀληθὲς καὶ ὄντα ὑποκίεσθαι, κατὰ περ ἔδειξεν τὸ νῦν ἡμέραν εἶναι ἢ ἐμε διαλέγεσθαι ἢ ἀναπνεῖν. ἢ γὰρ περιφάνεια τῶν πραγμάτων αὐτὸν βέβαιον ἔχει τὴν θέσιν, καὶ ἔστι διασφαλισμένη τὴν ὑπόθεσιν. ὥστε εἰ ἀληθὲς ἔστι τὸ πρᾶγμα μὴδὲ ἀλώμενα αὐτὰ ὡς μὴ ὄν ἀληθὲς. - Εἰ δὲ ἔστι τοιοῦτον, ἀλλὰ ψεῦδος κατέστηκεν, ἔδειξεν ὅφελος ἀνακόψει ἐκ τῆς ὑποθέσεως. Κὰν γὰρ μυριάκις αὐτὸ ὑποκείμενα σαφῶς ὡς φασὶ θεμελίους ἐκ ἀκολογήσει τὸ συμπέρασμα τῆς ζητήσεως ἐξ ἀνυπάρχων ὁρμωμένης ἀρχῶν. Οὐ μὴν, ἀλλ' εἰ τις οἷς ἀν' ὑποκίεσθαι

θῆται τῶν τὰ ἀπολυσθῆναι πρὸς τυγχάνειν ἀξιώσει, μή ποτε  
 πάντα ἀναρῇ ζήτησιν· εὐθέως γὰρ ὑποθήσεται ἕκαστος ἡμῶν τὸ  
 τὰ τρία τέσσαρα εἶναι· καὶ τὰς δοθέντας συνάξει ὅλη καὶ τὰ ἐξ  
 ὁκτώ γενήσεται. Ἀλλὰ μὴν τὰ τρία τέσσαρα ἐστὶν ὡς ἡ ὑπόθεσις  
 δίδωσι, τὰ ἄρα ἐξ ὁκτώ ἐστίν. *Id quod supponitur vel ve-*  
*rum est vel falsum. Si verum; ne postulemus illud con-*  
*fugientes ad rem suspicione plenam nempe hypothesein:*  
*sed ipsum illud assumamus. quandoquidem nemo vera*  
*& quæ existunt supponit, sicut nunc diem esse aut me di-*  
*scurere aut respirare. manifesta enim harum rerum ve-*  
*ritas, ex se firmam positionem habet, non vero dubiam*  
*hypothesein. Si ergo verum est, ne petamus illud ac si ve-*  
*rum non esset. Quod si autem non est ejusmodi, sed fal-*  
*sum supponitur, nihil commodi existet ex hypothesei.*  
*Nam etiamsi eam ponamus millies, putridis ut ajunt*  
*fundamentis, non sequetur conclusio quæstionis, quæ*  
*proficiscitur ex principiis insufficientibus. Quod*  
*si quisquam ex quibuscunque suppositis, consequen-*  
*tia vera elici dixerit, anne omnem is quæstionem*  
*tollit? Statim enim unusquisque nostrum ex hypothesei*  
*ponet tria esse quatuor. Et hoc concessō colliget sex octo*  
*esse. Si enim tria sunt quatuor & sex erunt octo. Sed*  
*tria sunt quatuor ut ponit hypothesis, ergo & sex erunt*  
*octo. Verum hæc omnia vel ex ipsius Sexti verbis re-*  
*futantur. Diximus antea Geometras, Axiomata, Defi-*  
*nitiones & Postulata, non eo modo in Geometricis*  
*ponere quo Hypotheses dubias: sed ut certa & cogni-*  
 ta



ta principiorum loco adducere, ut sciat unusquisque quibus ex Principiis Geometræ sua demonstrent. Vanum ergo est sophisma Sexti ea quæ vera sunt non debere supponi, sed simpliciter ut verum assumi. Neque enim Geometræ aliter quicquam faciunt: nec ideo Axiomata recensent, aut Definitiones, quod de iis dubitent: sed ut auditori exponant unde sua probent. Nemo autem negabit Axiomata Geometrica maiorem certitudinem habere quam illa, quæ ut certissima Sextus assumi contendit, nempe diem nunc esse. De hoc enim cæcus judicare non potest: de illis autem quivis ratione præditus. Nam eidem æqualia etiam inter se æqualia esse omnis sanus affirmat. Si ergo illa quæ clara sunt ac certa non dubiè, sed absolute ponenda atque assumenda sunt ut Sextus docet, utiq; principia Mathematica ut omnium certissima, vel ipso fatente sophista, necessario sunt admittenda. Equidem in Trigonometricis aliquando illud contingit, ut linea quæcunque trium quatuorve pollicum supponatur trecentorum aut quadringentorum pedum, nempe ut in antea adducto exemplo, quando ad investigandam longitudinem lateris AC. supponitur linea AB. partium 300. Omnia enim similia triangula sunt proportionalia. ut à Geometris demonstratur. Quæ ergo in minori triangulo inter latera fuerit ratio, eadem quoque inter latera majoris trianguli erit, modo hoc illi simile fuerit. Neque Geometra de illa linea demonstrat quam in charta habet, sed quæ per eam

D

de-

denotatur. ut bene ab Aristotele est observatum Posterior. Analyt. lib. I. cap. VIII. Οὐδὲ ὁ Γεωμέτρης ψευδὴ ὑποτίθεται ὥς περ τινὲς ἔφασαν λέγοντες ὡς ἔδὲ τῷ ψεύδει χρῆσθαι· τὸν δὲ Γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιάαν πῆν ἔ ποδιάαν ἢ εὐθεϊαν πῆν γεγραμμένην ἔκ εὐθεϊαν ἔσαν. Οἱ δὲ Γεωμέτρης ἔδὲν συμπεράινεται τῷ πῆνδε εἶναι γραμμὴν ἢν' αὐτὸς ἔφθεγγεται, ἀλλὰ τὰ διὰ τέπων δηλούμενα. *Neque vero Geometra falsū supponit, ut quidā ajunt: dicentes non debere falsum supponi: id vero Geometram facere, cum pedalem lineam vocet eam quæ pedalis non est, & rectam quæ scripta est, cum tamen talis non sit. Sed Geometra non eo quicquam concludit quod hanc lineam talem dicat, sed eo quod hoc denotatur.* Omnia ergo Sexti Empirici argumenta quibus evincere conatus fuit, male Mathematicos ac figillatim Geometras agere, quod demonstrare conentur sua ex hypothesi, falsa sunt ac frivola. Pergit porro ipsas quoque definitiones unamque omnino Propositionem in dubium vocare, de quo sequenti capite agemus.

## CAP. V.

Postquam ea quæ contra hypotheses Geometricas à Sexto Empirico sunt allata satis refutaverimus, consequens videtur, ut ea quoque falsi convincantur, quæ contra Definitiones ab ipso moventur. Dicit enim se ipsa principia Geometriæ falsitatis convincere velle, quo factò, ipsam quoque scientiam falsam esse con-



cludit. Sed nulla quidem alia is principia attingit quam solas Definitiones, atque in hoc omnem suum laborem ponit ut probet, lineæ, puncti, superficiei & corporis definitiones à Geometris allatas, probas non esse. Primum ergo videndum nobis est, an hoc sit principia Mathematicorum convellere aut eos falsi arguere: inde quam feliciter hoc ipsum præstet.

Diximus antea definitiones in Geometricis nihil aliud esse quam vocum seu terminorum explicationes quibus utuntur. Quantam vero utilitatem id Lectori adferat, quod accurate sciat quid singulis terminis indicetur, illis præcipue cognitum est qui aliquam his disciplinis operam impenderunt. Nisi enim termini essent, non tam perspicuè Geometræ mentem suam exponere possent. Longis enim verborum ambagibus uti cogerentur, multisque vocibus id explicare quod una fieri posset. Quantas vero tum Lectori tenebras offunderent, quantamque difficultatem rebus per se explicatu difficilibus adderent. At vero si voces quasdam simpliciter ponerent, sine earum explicatione, persæpe non intelligerentur ab aliis. Si enim quisquam multa de Parabolis, Ellipsibus aut Hyperbolis demonstraret, neque explicaret quas lineas hisce vocibus indicaret, surdis fabulam narraret. Necessariæ ergo sunt vocum explicationes in Geometricis, ut unus alterum intelligat, faciliq; negotio semel discat, quid omnibus in locis tali voce designet. Imponit vero Mathematicus nomina suis rebus non semper quidem opti-

ma & convenientissima, sed ea quæ primum ipsi occurrunt. Neque sane homini, rebus gravissimis maximæque utilitatis adeo intento, vitio verti debet, si minus proprie loquatur. Qui vero de vocum proprietate sunt solliciti, meliores possunt introducere, veritate eadem retenta ac illæsa. Quin etiam alias definitiones earundem rerum in medium adferre, si prædecessorum minus commodæ, minusve sufficientes fuerint. Ita Apollonius Pergæus definitionem Coni ab Euclide lib. XI. propositam generaliore reddidit, ut non tantum conis rectis, sed etiam scalenis conveniret. Neq; tamen ideo vel Euclidem refutavit falsive accusavit, vel principia Mathematica destruxit aut dubia reddidit.

Præterea videndum omnino erit quales veritates Definitiones Geometricæ contineant. Nempe supponunt tales res de quibus agunt in natura existere: & cum existant, simpliciter indicant se de iis rebus demonstrare quæ talem naturam habent. Sic v. g. supponit Geometra dari longitudes & latitudes, & posse longitudinem considerari sine latitudine, quantum quidem lineam dicunt. Hanc vero terminos suos sive extrema habere, quæ puncta dicuntur. Posse etiam lineas tales invicem jungi, & pro diversa conjugatione diversas Figuras facere. Quæ qui negaverit, næ idem interdum solem lucere negabit. Sunt enim clarissima per se, & tam certa quam illa quæ Sextus ut certissima sine hypothese ponenda vult. Verum Sexti ipsius verba audiamus. Μελετήσας δὲ ἐξῆς διδάσκωμεν ὅτι

†ευ.



ψευδείς καὶ ἀπιδάνας αὐτῶν συμβέβηκεν εἶναι τὰς ἀρχὰς τῆς  
 τέχνης. εὐθέως τοίνυν ὡς πρῶτον τι καὶ στοιχειωδέστατον διδά-  
 σκωσιν ἡμᾶς οὗτο σῶμα μὲν ἐστὶ τὸ τὰς τε εἰς ἔχον διαστάσεις, μῆκος,  
 πλάτος, βάθος, ὧν πρῶτη μὲν διάστασις ἐστὶν ἡ κατὰ μῆκος, ἀνω-  
 θεν καὶ κάτω, δευτέρα δὲ ἡ κατὰ πλάτος ἀπὸ δεξιῶν ἐπ' ἀριστερά,  
 τρίτη δὲ ἡ κατὰ βάθος ἀπὸ τῶν πρόσω εἰς τὸ ὑπίσω. σιγμῆς  
 μὲν γὰρ ῥυτίσις γραμμὴν γνέσθαι φασι. γραμμῆς δ' ἐπιφάνειαν.  
 ἐπιφανείας δὲ τερεὸν σῶμα, παρὸ καὶ ὑποχάφοντες λέγουσι σιγμὴν  
 μὲν εἶναι σιμῆιον ἀμερές καὶ ἀδιάστατον ἢ πέρασ γραμμῆς. γραμ-  
 μὴν δὲ μῆκος ἀπλῆλές ἢ πέρασ ἐπιφανείας· ἐπιφάνειαν δὲ πέρασ  
 σῶματός ἢ πλάτος ἀβαθές. *Pergentes autem deinceps di-*  
*cemus quod falsa & non probabilia contingat esse ipso-*  
*rum artis principia. Statim ergo nos docent tanquam*  
*primum & quod maxime accedit ad naturam elementi,*  
*quod corpus sit id quod habet tria intervalla seu di-*  
*mensiones longitudinem, latitudinem & profunditatem.*  
*Quarum quidem prima dimensio est per longitudinem*  
*superne deorsum: Secunda autem per latitudinem à de-*  
*xtris ad sinistra: tertia autem per profunditatem ante*  
*& retro. Si ergo punctus fluxerit, dicunt fieri lineam,*  
*si linea autem, superficiem, sin vero superficies, corpus so-*  
*lidum. Describentes igitur dicunt punctum esse signum*  
*carens partibus, & quod nullum suscipit intervallum;*  
*aut terminum lineæ. Lineam autem longitudinem ca-*  
*rentem latitudine, aut terminum superficiei. Superfi-*  
*ciem autem terminum corporis, aut latitudinem caren-*

D 3

tem

*tem profunditate.* Atque hæc quidem refutare conatur, ac evincere nec punctum, nec lineam, nec superficiem Geometricam quicquam esse. Verum satis clare his demonstrat, non se veritatem quærere, sed tantum quomodo possit veritati contradicere. Etenim dari res quasdam quæ longitudinem, latitudinem & profunditatem habeant, non minus clarè patet, quam Solem lucere, aut me nunc respirare. Imo de eo quidem etiam illi judicare possunt, qui hæc vera esse certo dicere nequeunt. Nam interdum clarum esse cæcus non dicet. Neq; cæcus aut surdus accurate judicabit quod ego respirem. Sed quod longitudinem latitudinem & profunditatem habeam uterque probe novisse potest, & de seipso aliisque rebus idem judicium ferre. Talem vero rem corpus Mathematici vocant. Si ergo datur res quæ longitudinem latitudinem & profunditatem habet, datur etiam illud quod Mathematici corpus vocant. Datur preterea longitudo & latitudo & profunditas, & ut res distinctæ tam separatim, quam conjunctim considerari possunt. At si longitudo consideratur sine latitudine, est quidem id linea. Linea enim definitur Geometris μήκος ἀπλάτης. *Longitudo sine latitudine.* Sunt enim res distinctæ longitudo & latitudo, ideoque facile unum sine alio concipi potest. Quis enim negaret in superficie ABCD fig. n. 1. cujus longitudo sit AB latitudo AD. posse solam longitudinem, utpote rem à latitudine distinctam, per se concipi. At vero longitudo ita considerata, quoad latitudinem



nem dividi nequit, nec ullas partes in latitudine habet. Est vero talis linea terminus superficiei & extremum illud quod non tam oculis incurrit, quam mente concipitur, in quo superficies illa desinit. Si ergo extremum superficiei & integra linea tam separata concipi possit, ut nullo modo divisionem in latitudine admittat; quidni etiam extremum lineæ hoc modo concipi possit, ut nullam longitudinem habeat. Extremum enim id est quo nihil est exterius. at in superficie quidem, quodcunque ullam latitudinem habet, id dividi potest. & per consequens una hujus pars exterior erit; altera interior: adeoque neque illud extremum erit. Ita etiam in longitudine, id extremum erit quod dividi secundum longitudinem non potest. Si enim dividi potest, partes habebit, quæ ambæ quidem extremum illud constituere non possunt, unum enim est extremum. Quoniam ergo extremum quod est in longitudine, seu terminus lineæ, nullo modo divisionem in longitudine partesve habeat, utique omnino erit indivisibile. Est enim extremum non superficiei sed lineæ. At linea antea demonstrata fuit nullas in latitudine partes habere: atque ex eodem principio constat neque secundum profunditatem posse dividi. Punctus ergo lineæ terminus neque in longitudine, neque in latitudine, neque in crassitie seu profunditate ullas partes habet, adeoque est indivisibilis. Sexti vero argumenta quod attinet ne hili quidem sunt. In puris enim cavillationibus consistunt. Ἡ τοιούτων συγμῇ ἢν φασὶ σημεῖον

ἀδύνατον

ἀδιόστηται ὑπάρχειν, ἢ τὸ σῶμα νοεῖται, ἢ ἀσώματα. Καὶ σῶμα μὲν ἔκ ἀν' ἐμὴ καὶ αὐτῶς. τὰ γὰρ μὴ ἔχοντα διάστασιν. ἔκ εἶναι σώματα. λείπεται ἔν ἀσώματι αὐτὴν ὑπάρχειν, ὅ πάλιν ἐστὶν ἀπίθανον. Το μὲν γὰρ ἀσώματι ἑδενὸς νοεῖται γεννητικόν, ὥσαντι ἀφίγες καθεστώς. ἢ δὲ σιγμὴ νοεῖται τῆς γραμμῆς γεννητικῆς. ὃ τοῖον ἐστὶν σημεῖον ἀδιόστατον ἢ σιγμῆς. *Punctus igitur (quem signum esse dicunt nullum habens intervallum) aut corpus concipitur esse, aut incorporeum. Sed corpus quidem secundum illos non est. Quæ enim intervalla non habent neque corpora sunt. Restat ergo ut incorporeum dicatur. Quod rursum est absurdum. Incorporeum enim nihil potest generare, cum minime tangi possit. Intelligitur autem punctus gignens lineam. Non est ergo punctus signum, nullum habens intervallum. Sed duplicem heic quidem committit errorem, primum in voce generationis, secundum supponendo falsum medium terminum. Neque enim Geometræ voce generandi eo modo utuntur quo Physici in generatione univoca aut æquivoca; sed illud quod aliud quocunque modo efficit etiam modo sensibus plane imperceptibili & tantum intellectui obvio. Ideoque quando hac in re adhibent vocem γενεσις, solam nudamque constructionem intelligunt. Sed neque absolute verum est, id quod in argumentatione pro medio termino supponit, illud nempe quod generatur debere humano tactui obviū esse. Etenim qui minima ista animalcula consideraverit, ut pulices aliasque, earumque con-*  

jun-



junctionē viderit, non dicat id quod generat tangi necessario debere. Sed & multa animalia sunt pulice minora, quæ vix integra tangi possunt, nedum partes tam exiles, quibus tamē generant de quibus postea accuratius. Sed ut ad rem revertamur, non de factione, aut generatione Physica heic sermo est, sed de Geometrica. Posse autē lineam ex puncto circūducto produci, is minime negabit qui aliquid in rebus ad sapientiā spectantibus noverit. Sit enim planū quoddā  $ABCD$  in fig. n. 1. cuius basis sit  $AB$  erectū super aliud planū  $AQ$  ad angulos rectos. Cū ergo superficies  $DCAB$  ulterius in latitudine dividi nō potest, remanet linea  $AB$  indivisibilis, cuius extrema sunt  $A$  &  $B$  puncta, quæ post infinitā lineæ  $AB$  divisionem remanent indivisibilia. Maneat punctum  $B$  immobile, punctum vero  $A$  circumducatur. certum est extremum lineæ  $AB$ , hoc est punctum  $A$ , describere lineam circularem  $AE$ . Si vero ambo puncta æquali motu ferantur, tum utrumque lineam describere rectam: & punctum quidem  $B$ , lineam  $BE$ , punctum vero  $A$  rectam  $AF$ . atque eodem tempore totam lineam  $AB$  integram superficiem  $AFBE$ . formare: quæ quidem tam clara sunt ut ab nemine negari possint, qui modo recte hæc conceperit. Quoniam vero dubium aliquod heic hæere posset, quo modo linea in infinitum ita dividatur, ut semper in minores minoresque partes secetur, idque in infinitū; quomodo etiam extremum illud, quod punctum Mathematici dicunt, indivisibile sit, aliamque naturam habeat: de hoc sequenti capite agemus.

E

CAP.

## CAP. VI.

Dicimus ergo lineam quamcunque termina tam in infinitum dividi posse: terminum vero lineæ esse indivisibilem. Quod ut demonstretur, suppono cognita & demonstrata ex Euclide lineam posse dividi bifariam, de quo postea: & duo latera cujusvis trianguli rectilinei majora esse reliquo.

Sint nunc in figura n. 11. extrema duorum planorum rectæ lineæ AC & AB. quæ quidem jungantur invicem circa A ita ut concurrant. Extremitates porro earum C & B jungantur invicem recta CB. Dividatur CB bifariam in E. in linea autem AC ponatur recta CF æqualis ipsi CE: & in AB recta BH æqualis BE. dico CF & BH non concurrere. Si enim concurrerent triangulum constituerent, una cum recta linea CB. At tum CB, unum latus hujus trianguli, esset æquale FC & HB. binis lateribus ejusdem trianguli, quod est absurdum: ergo FC & HB non concurrunt. Ducatur porro ab F ad A recta, atq; illa dividatur bifariam in G. in recta autem AF sumatur recta linea FK æqualis FG, & in recta AH, æqualis ipsi HG, recta HI. non tamen concurrunt KF & HI. Si enim concurrerent, constituerent triangulum una cum linea FH. at sic duo latera trianguli rectilinei KF & IH essent æqualia reliquo, quod est absurdum, sunt enim necessario majora. Cum ergo KF & HI non concurrant, ducatur recta à K. ad I. dividaturque bifariam in L. & in recta AK sumatur linea KM. æqualis ipsi KL, & IN æqua-



æqualis ipsi IL. ut ambæ KM & IN æquentur toti KI:  
 dico rectas KM & IN non concurrere. Si enim con-  
 currerent, facerent cum linea KI triangulum, & sic duo  
 latera, ejusdem trianguli rectilinei, non essent majora  
 reliquo, sed illi æqualia, quod est absurdū. Si igitur pro-  
 grediar conjungendo MN, & dividendo rectam bifa-  
 riam in O, & sumendo partes æquales PM. & QN ipsis  
 OM & ON, neque concurrent PM & QN, neque si  
 jungatur PQ recta, atque in R. dividatur bifariam,  
 partesque PS & QT sumantur æquales PR & QR, i-  
 psæ PS & QT concurrent. Neque enim duo latera  
 ejusdem trianguli rectilinei reliquo vel minora vel æ-  
 qualia esse possunt, sed necessario sunt majora. Atque  
 illud sicut semper & in omnibus rectis lineis verum est,  
 ita etiam manifestum reddit lineas rectas in infinitum  
 dividi posse, eisdemque in infinitum partes detrahi &  
 auferri. sicut lineis AC & AB, partes CF. FK. KM.  
 MP. PS. SX. Xa. ad. & BH. HI. IN. NQ. QT. TY.  
 Yβ. βe. & sic in infinitum progrediendo, detrahuntur.  
 Lineæ vero quæ inter FH. KI. MN. PQ. ST. XY.  
 αβ. δε. & sic in infinitum ducuntur, etiam bifariam  
 in infinitum secantur. Si enim linearum intermedia-  
 rum una dividi ulterius nequiret, non dicam quoad  
 sensum, sed quoad intellectum; tum linea ulterius non  
 esset, sed illud quod Mathematici punctum appellant,  
 cujus pars nulla. Si vero punctum esset, tum lineæ  
 quæ ad latera sunt concurrerent. ut verbi causa si quis

E 2

dice-

diceret lineam  $\delta\epsilon$  non posse secari, non ergo linea esset, sed punctum: adeoque  $\alpha\delta$  &  $\beta\epsilon$  in eo puncto concurrerent, & cū  $\alpha\beta$  triangulum facerent. At  $\alpha\delta$  æquatur dimidiæ  $\alpha\beta$ , &  $\epsilon\beta$  etiam æquatur dimidiæ  $\alpha\beta$ , ideoque tota  $\alpha\beta$  æquatur duobus lateribus ejusdem trianguli rectilinei  $\alpha\delta$  &  $\beta\epsilon$  quod est absurdum. Non concurrunt ergo  $\alpha\delta$  &  $\epsilon\beta$ . ideoque neque punctum illic est, sed linea  $\epsilon\delta$ : quæ ideo secari in partes potest. Atq; hoc ita in infinitum procedit.

Quod si dicatur non posse in infinitum partes auferri à lineis AC & AB, sed lineæ quidem AB, post ablatam ultimo loco  $\epsilon\beta$ , ipsi verò AC, post ablatam  $\delta\alpha$ , nihil ultra tolli posse: nihil ergo ex lineis AC & AB residuum erit. quamdiu enim aliquid est, tolli potest: quod vero non est, neque tollitur: ergo terminus & extremum lineæ AC erit in  $\delta$ . & AB. in  $\epsilon$ . Quoniam ergo dictum fuit principio lineas AB & AC concurrere circa extrema versus A. ergo concurrent circa  $\delta\epsilon$ : adeoque & lineæ  $\alpha\delta$  &  $\beta\epsilon$ , partes linearum AC & AB concurrerent circa  $\delta\epsilon$ . Unde triangulum erit constructum ex  $\delta\alpha$   $\alpha\beta$  &  $\beta\epsilon$ . sed  $\delta\alpha$  est dimidium ipsius  $\alpha\beta$ , &  $\beta\epsilon$  etiam dimidium ipsius  $\alpha\beta$ : ergo latus unum trianguli rectilinei  $\alpha\beta$  erit æquale binis ejusdem trianguli lateribus, quod est absurdum. Non ergo concurrent CA & BA circa  
pun-



puncta  $\delta$ . ideoque ista puncta neque eorum extrema sunt. unde adhuc aliquid ipsis auferri potest. Et hoc ita in infinitum procedit.

Ex quibus manifestè demonstratum est, primo, lineas rectas in infinitum dividi posse, & à quacunque linea recta semper partem aliquam posse auferri. secundo, duas rectas concurrentes se invicem in puncto necessario contingere.

Cum enim AC & AB non concurrant in eo quod dividi potest, sed indivisibili: ergo concurrunt in puncto. At quandiu pars dimidia lineæ intermediæ lineis vel AB vel AC demi potest, non concurrunt. Partes enim quæ demuntur, æquales sunt lineæ intermediæ: ideoque si concurrerent, triangulum rectilineum haberet unum latus reliquis duobus lateribus æquale, quod est absurdum. At lineæ AB, AC in infinitum dividi possunt, partesque iis in infinitum detrahi: ergo neque in infinitum concurrere possunt, quatenus lineæ sunt, hoc est divisibiles: sed necessarium est, ut concursus fiat in indivisibili, hoc est in puncto.

Habemus ergo necessario aliquid indivisibile quod nullo modo dividi potest: & habemus præterea illud quod in infinitum dividi potest. Neque enim ulla in recta linea divisio concipi potest, quin statim alia harum partium divisio sequatur. Si enim id non esset concurrerent latera, & per consequens triangulum constituerent cujus duo latera tertio æqualia. Nulla ergo linea quamvis in infinitum dividatur, in puncta

dividetur. Neque ulla tam minuta lineæ pars sumi potest, quæ, quàmvis in centum mille partes secetur, unquam punctum fiet. Si enim fieret, tum esset indivisibile: at si indivisibile, ulterius dividi non posset. Ergo linea in infinitum non divideretur. At demonstratum & lineam in infinitum dividi. Cum ergo linea in puncta dividi non possit, neque ex punctis componitur. Ex quo enim aliquod componitur, in idipsum resolvitur ac dividitur. At linea in puncta nullo modo dividitur: ergo neque ex punctis componitur. Punctus quidem unicus fluens aut motus gignit lineam: non tamen jungendo se cum aliis punctis, sed simpliciter motum suum peragendo. In quacunque ergo linea, infinita puncta sumi possunt. Nam omnis divisio fit in puncto. ergo, cum cujuscunque lineæ infinitæ sint divisiones, etiam infinita in quacunque linea erunt puncta. Neque in majore longioreve linea plura erunt puncta quam in breviori & minori. Quod ut intelligatur, sequenti capite demonstrationem quandam Geometricam hujus rei proponemus.

## CAP. VII.

Suppono in hac demonstratione circulum, si super planum æqualiter ac perpendiculariter circumvolvatur, et ad easdem semper partes, à puncto quodā in peripheria usque ad idem punctum, describere lineam rectam æqualem circuli peripheriæ: quod etiam quivis satis per se intelliget, modo figuram n. 4. paulo diligentius inspexerit. Circulus enim ABD concipiatur de-



devolvi in plano quodam perpendiculariter, motu æquali, ad easdem semper partes versus HC: dico cum quidem in hoc plano describere lineam rectam AC. Circumvolvatur circulus usquedum B tangat lineam AC v. g. in L, dico AH æqualem esse ipsi AB. Eodem vero modo circumvolvatur circulus EGPO super EH, ita quidē ut G tangat lineā EH, in puncto I. Recta ergo EI. minor erit quam recta AL. Etenim cum periphēria circuli ABD major sit, quam periphēria circuli EGPO: major etiam erit recta, æqualis periphēriæ circuli ABD, quam recta æqualis periphēriæ EGPO. & per consequens, quadrans illius major quadrante hujus. EI. ergo recta linea descripta à quadrante periphēriæ circuli EGPO minor est, quam AL recta descripta à quadrante circuli ABD. Sit nunc OPGE circulus insertus circulo ABD, ita ut uterque super eodem centro F simul circumgyrentur. Promoveatur ABD circulus versus C. in plano AC. etiam EGPO promovebitur eodem tempore in plano EH, describens lineam EH. Neque periphēria circuli EG unquam discedet à recta EH, non magis quam periphēria AB à recta AC. At ubi quadrante majoris circuli peracto, punctum B fuerit in L: centrū circuli F erit in K. per. xix. III. Elem. recta enim KL est perpendicularis ipsi AC. Ergo FB faciet lineam KL. & per consequens G erit in R. Linea ergo circularis EG. describet lineam ER. Si ergo linea ex punctis componitur: quot igitur puncta in linea EG tot etiam erunt in ER. semper enim EG tangit ER in pun-

puncto: ideoq; sicut hujus puncta mutantur, ita etiam illius puncta mutantur, adeoque singula puncta EG tangent singula puncta ER. Et quoniam EG incipit cum linea ER in puncto E, & terminatur cum linea ER in puncto R, seu G: ergo quot puncta fuerint in EG, tot etiam erunt in ER. Sed eodem modo, quando EG decurrit in plano EH, non moto circulo ABD, describet lineam EI. ergo, quot puncta fuerint in EG, tot etiam erunt in EI. nam incipiente EG incipit EI: & terminante EG, terminatur EI. & semper quamdiu EG super EI movetur, tangunt se invicem in puncto. quot ergo puncta fuerint in una linea, tot erunt in altera. Sed antea diximus tot puncta esse in ER quot in EG. ergo tot erunt in ER quot in EI. Ergo linea maxima tot habebit puncta quot minima. Verum si linea ex punctis esset composita: ergo quo plura puncta linea haberet, eo major esset: & quo pauciora, eo minor. quod tamen non fit. Ergo linea ex punctis non componitur.

Atque ex his refutatur alterum Sexti argumentum.

Εἴγε μὴν (Φαίρεα καὶ ἐν' σιμείων ἀξιῶται τῆς ἐπιπέδου ἀπεδοται, ἐκκυλισμένην τε γραμμὴν ποιεῖν, δῆλον ὡς ἐπιχαρὰ πιπτόνων σιμείων τὴν ὅλην συνθέσαν γραμμὴν, τοίνυν εἰ τῷ μεγέθους τῆς γραμμῆς συμπληρωτικὸν ἐστὶ τὸ σιμείον, ἔξει καὶ αὐτὸ μέγεθος. συγκεχάρηται δὲ τῷ μεγέθους τῆς γραμμῆς συμπληρωτικὸν αὐτὸ τυγχάνειν· καὶ αὐτὸ ἄρα μέγεθος ἔξει καὶ ἐκ ἀδιάστατον γενήσεται. Si enim probetur sphaeram in uno puncto planum contingere, & circumrotatam, lineam describere: manifestum



*est, quod cum insequentia se invicem puncta totam lineam componant, ipsum quoque punctum magnitudinem habeat, quandoquidem lineæ magnitudinem expleat: Conceditur autem punctum explere magnitudinem lineæ, ergo & magnitudinem habebit, neque indivisibile erit.* Sed non conceditur punctum lineæ magnitudinem augere: si enim id verum foret, ergo quæ plura haberet puncta major linea esset, quam quæ pauciora: & vice versa; linea major plura haberet puncta quam minor. Verum ista omnia ex adducta antea demonstratione refutantur. Eadem enim circuli portio EG describit lineam EI. & lineam ER. ergo æqualia numero puncta istæ duæ lineæ haberent, & ex doctrina Sexti æquales essent: quod tamen falsum est. ER enim multo major est quam EI. Non ergo punctum auget magnitudinem lineæ; neque est lineæ pars. quomodo-cunque enim linea secatur, & in quocunque partes, nunquam partes lineæ erunt puncta, sed lineæ, quamvis minutissimæ: quandoquidem linea in infinitum secatur, adeoque in infinitum progrediendo partes lineæ semper sunt divisibiles; punctum vero nulla ratione est divisibile, ut antea est demonstratum.

Mirabilis sane est hæc indivisibilium & in infinitum divisibilium natura, quæ limites humani ingenii excedit. Quippe intellectus noster sicut natura sua finitus est, ita infinita minime capit: quod alio quodam non inutiles exemplo illustrabo, quo Galilæus Galilæi insignis summoque ingenio præditus Mathematicus,

F

in

in suis demonstrationibus de motu locali &c. usus est. Ex principiis Arithmeticis constat posse numerum quemcunque in se multiplicari. Numerus autem in se ductus dat quadratum: ipse autem numerus radix vocatur. Cum ergo omnis numerus possit ex se quadratum generare, ergo omnis numerus alicujus quadrati radix erit. Quot vero radices sunt, tot etiam dantur quadrata: quævis enim radix suum habet quadratum. Si enim radix in se multiplicetur generat quadratum. Dicendum ergo foret, quot sunt numeri, tot etiam sunt radices. Nullus enim dari potest numerus qui non possit in se duci, adeoque quadratum ex se progignere. Quot ergo sunt numeri, tot etiam sunt radices. At vero quot radices, tot etiam sunt quadrata. Ergo quot numeri simplices, tot etiã sunt quadrati. At hoc ultimũ verum non est. Ab unitate enim usque ad denariũ inclusive, decẽ quidẽ sunt numeri simplices, sed duo tantũ quadrati, quaternarius nempe & novenarius, vel numerando unitatẽ, qui sui ipsius quadratum efficit, tres. Ab 11 porro ad 100 numeri quidem sunt 90 simplices, sed quadrati tantum septem. nempe, 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. adeoque inter unitatem & centenarium inclusive numeri quidem erunt 99. quadrati vero sine unitate 9. cũ unitate 10. Inde autẽ ad 1000. numeri simplices sunt 900: quadrati autẽ solummodo viginti & unus, hoc est in mille numeris, quadrati triginta & unus. Porro in decẽ mille numeris ubi ad myriadẽ ascendimus, quadrati tantum sunt centum. Quod si numeri,  
qvi



qui 10000 excedunt usque ad 1000000 inclusivè, sumantur, erunt illi quidem 990000, quadrati autem nongenti, adeoque in simplicibus numeris 1000000, quadrati erunt 1000. Inter numeros ergo ab unitate ad centenariū vix tertia pars est quadratorum. Ab unitate verò ad centenarium, pars decima est quadratorum. A centenario ad millenarium, quadrati partem simplicium numerorum explent quadragesimam quintam, ab unitate autem ad millenarium partem fere tricesimam secundam. A millenario ad myriadem, pars centesima quinquagesima sexta est quadratorum, ab unitate autem ad myriadem pars centesima. Denique à myriade ad millionem (ut vocant) pars tantum millesima & centesima quadratos habet numeros, ab unitate vero ad millionem pars millesima. Numeri ergo simplices decadis, triplo plures sunt quam quadrati: & Hecatontadis, decuplo plures: Chiliadis autem, trigecuplo: Myriadis vero, centuplo. Denique in milione ut vocant seu myriade myriadum, numeri simplices millecuplo plures sunt quam quadrati. Atque si in infinitum progrediatur, quo plures numeri, eò semper pauciores quadrati. Id ergo quod ex clara, ut videtur, certaue ratione pro certo veroque concluditur, verum tamen non est. Alia enim est natura finitorum alia infinitorum: Si enim simplex numerus res finita foret, ita ut dari posset ultimus numerus simplex quo alius major non esset: tum etiam dari possent totidem numeri quadrati. Si enim diceretur millenarium o-

F 2

mni-

nium numerorum simplicium maximum esse, ut hoc nullus major daretur, tum omnes numeri simplices mille omnino essent, iidemque omnes radices, qui in se multiplicati mille quadratos generarent, & si quadrati cum suis radicibus multiplicarentur, mille prodirent cubi, & sic mille quadrato quadrati, & mille cubocubi. &c. Sed non ita est: numerus enim in infinitum augeri potest, neque aliquis sumi, quin eo major detur. Quod si ad cubos, quadratoquadratos, cuboquadratos, cubocubos, ceterosque ejus generis numeros progrediamur, argumentum quidem eodem modo verum videbitur: sed re & opere falsum eadem via deprehenditur. Quot enim numeri, tot radices: nullus enim numerus est, qui non in seipsum multiplicari possit, adeoque quadratum ex se gignere. At quod quadratum ex se generat radix est. Sed eodem modo potest etiam omnis radix cum suo quadrato multiplicari, unde nascitur cubus. Cum ergo omnis radix habeat suum quadratum, omne autem quadratum cum suo radice multiplicatum cubum generet: ergo quot radices, tot cubi. At vero propositum fuit tot esse radices, quot numeros: omnis enim numerus in se multiplicari potest & quadratum generare. Adeoque omnis numerus est alicujus quadrati radix. Ergo quot numeri sunt, tot etiam cubi erunt. Porro radix ducta in cubum dat biquadratum seu quadratum in se ductum, quartive ordinis numerum. Rursus radix in hunc ducta, dat numerum quinti ordinis: & in hunc ducta sexti: atque sic in infinitum progredi-



diendo. Quot igitur radices, hoc est quot sunt numeri simplices, tot quadrati, tot cubi, & tot quarti, imo quinti, sextique ordinis numeri, atque sic in infinitum. At vero hoc falsum est. Quadrati enim longe pauciores sunt quàm numeri simplices, ut jam demonstratum fuit: cubi vero his pauciores; quarti verò quinti & sexti ordinis numeri longe adhuc pauciores. In decade enim unus tantum cubicus est numerus, nempe octonarius, præter unitatem qui sui ipsius cubus est: quarti, quinti, sextive ordinis nullus est, nisi pro his omnibus unitatem ponas. Si enim unitatem centies in se multiplicaveris, hoc est unitatem centum vicibus multiplicaveris per unitatem, semper prodit unitas. In Hecatontade autem cubici numeri sunt tres, nempe 8. 27. & 64. quibus si unitatem addas erunt quatuor. Quarti ordinis tres omnino sunt 1. 16. 81. Quinti & sexti ordinis præter unitatem unus tantum in unoquoque est, 32. in V. & 64. in VI. In Chiliade cubici quidem numeri cum unitate decem, quarti vero ordinis quinque 1. 16. 81. 256. 625. quinti ordinis tres. 1. 32. 243. sexti ordinis totidem. 1. 64. 729. Porro in Myriade cubici quidem numeri erunt 21. quarti vero ordinis 10. quinti sex. & sexti ordinis quatuor, una cum unitate, quæ in cæteris etiam numeratur. Adeoque quo major numerus fuerit, eo pauciores, respectu numerorum simplicium, sunt quadrati, & adhuc pauciores cubi, & multo adhuc pauciores quarti, quinti, sextique ordinis numeri. Et quo longius ab unitate recedas, tanto plures erunt

F 3

nu-

numeri irrationales, quam quadrati: & quadrati, quam cubi: & denique cubi, quam quarti ordinis numeri: & sic in infinitum. Et tamen verum est, omnem numerum posse in se multiplicari, & iterum in productum, & iterum in productum, & iterum in productum. atque sic in infinitum. Adeoque etiam certum est nullum plane numerum dari, quin sit radix alicujus quadrati: tum quoque radix alicujus cubi: & porro radix alicujus numeri quarti, quinti, sextive ordinis. Certum præterea est omnem radicem quadratam suum habere numerum quadratum: ideo enim radix vocatur quod in se ductus numerus quadratum generet. Omnem quoque radicem cubicam suum habere cubum: & radicem quarti ordinis suum habere biquadratum: & quinti ordinis ac sexti eodem modo, atque sic in infinitum. Si ergo omnis radix quadrata suum habet quadratum ergo quot radices, tot quadrati: & quot radices cubicæ, tot numeri cubici, & sic in infinitum. Sunt autem omnes omnino numeri radices quadratæ, & cubicæ, & quarti, quinti, sextiq; ordinis numerorum &c. Nullus enim numerus est, qui hos omnes ex se generare non possit. Quot ergo numeri, tot radices, tot quadrati, tot cubi, tot biquadrati, tot bicubi. Nempe, si ullo certo numero definire velim, fallor; neque ullo modo dicere possim, quot vel numeri sint, vel radices, vel quadrati, vel cubi &c. sed recte & vere dico esse numero infinitos. Adeoque infinitum numerum esse, in quo, tot sunt quadrati, quot numeri: tot cubi, quot numeri: tot quin-



qvinti, sexti ordinis numeri, qvot numeri simplices. Quo quidem modo, inter omnes intellectu nostro comprehensibiles numeros, sola unitas erit numerus infinitus, eritq; & radix, & quadratum, & cubus, & bi-quadratum, & bicubus, & qvocunq; demum progredi voluerimus. Naturam enim habebit omnibus his convenientem. Quadrati enim numeri hanc habent proprietatem, ut semper inter se unum habeant medium proportionalem: Cubici vero duo: quarti autem ordinis tres: qvinti ordinis qvatuor: sexti ordinis qvinq; & sic in infinitum. Sic inter 9 & 16. duos numeros quadratos, datur medius proportionalis 12. Inter 4 & 81. duos etiam quadratos, medius proportionalis datur 18. Porro inter duos numeros cubicos 27. & 64. duo medii proportionales dantur. 36. 48, Sic inter qvarti ordinis numeros 81. & 256. tres dantur medii proportionales 108. 144. 192. & sic in cæteris. At vero inter unitatem & quadratum qvemcunq; numerum, etiam datur media proportionalis: ut inter 1. & 81. quadratum 9. datur medius proportionalis 9. inter. 1. & 64. cubum dantur duo medii proportionales. 4. 16. inter 1. & 81. qvarti ordinis numerum dantur tres medii proportionales. 3. 9. 27. & sic in aliis omnibus. Qvocirca, unitas naturam omnium cujuscunqve ordinis numerorum habebit: & qvot neqvicqvam in infinitum progrediendo qværimus, id in sola unitate inter omnes nostro intellectu comprehensibiles numeros, invenimus.

Qud

Quid divina scrutamur mysteria, & æterna ac infinita angustis intellectus nostri limitibus circumscribimus? Hæc sane in clarissimis ac cuius maxime obviis principiis fundantur: & tamē quando ut infinita & indivisibilia considerantur, à nostro intellectu percipi minime possunt. Quis hoc intelliget? tot radices esse quot numeros: tot quadratos, cubos, biquadratos, bicubos, &c. quot radices; adeoque quot numeros: & tamē in mille numeris simplicibus, quadratos tantum esse 3 i. cubos decē: quarti ordinis, quinque; quinti ordinis, tres: decimi vero ordinis, tantum unum, ipsam nempe unitatem. Si tot sunt cubi, & quadrato quadrati &c. quot numeri: ergo in mille numeris, mille cubi erunt, mille biquadrati: vel etiam mille erunt unum, & decē unum, & tria unum. Quid absurdius his dici posset? & tamen tales absurditates committere cogimur. quando infinita ad finitorum rationes examinamus. Quid mirum igitur est? non posse intellectum nostrum comprehendere quomodo infinitus ille & incomprehensibilis Deus & unus sit & trinus: quomodo idem in sua æternitate omnia agat: milleque anni sint ipsi ac unus dies: & cum ubique sit, nusquam tamen comprehendatur? Quid mirum, si nulla ratione assequi possimus, quomodo is qui omnia continet, omnia sustinet, idem in utero virginis sustineatur: certis, in terra locis, circūscribatur, in cruce suffigatur? Si enim ista quæ manifestis principiis nituntur, minime capi à nobis possint; eo quod sint infinita: quanto minus ea comprehendemus  
quæ



quæ non tantum sunt infinita, æterna ac incomprehensibilia, verum neq; ullo modo cognosci aut investigari queunt, ex natura cognitis principiis: sed divina tantum gratia revelantur. Fungos profecto aut insanos sophistas oportet esse eos, qui cum videant in rebus pure naturalibus nihil se intellectu suo dignoscere ubi ad infinita ventum est, in divinis rebus & quæ omnem intellectus capacitatem longe excedunt, majora & certiora sibi polliceri audent, ausuq; non dicam temerario sed plane furioso ac Diabolico, ea omnia in dubium vocare, imo falsi arguere conantur quæ infirmæ & cæca ratione sua perspicere nequeunt. Anne ergo Sol aut lux non erit quod cæcus ista videre nequeat? an omnes soni pro nihilo habebuntur, quod surdus hos non exaudiat? Sed vero si isti hæc negarent, facile cæteri mortales eorum insaniam dijudicarent, eo quod maxima hominum pars organa ab ipsa natura habeat ad hæc dignoscenda: illorum vero stultitia, qui humanæ rationis modulo divina metiri volunt, eaque negare quæ intellectu non percipiunt, non quidem tam clare ab omnibus cernitur; cum omnium hominum ingenia his limitibus à natura sint circumscripta, ut infinita capere nequeant. Et homo tamen ambitiosissimum animal omnia se intelligere ac ratione comprehendere posse persvadet, suæque sapientiæ limites ultra terminos à natura positos proferre non dubitat. Sed verant huc illi animum atque oculos, & ubi in minimis hisce ac vulgaribus rebus didicerint quam cæci sint &

G

omni

omni plane ratione destituti; quando de infinitis, etiam quæ in natura considerantur, judicium erit ferendum: demum divina debita reverentia venerentur, fideque apprehendant quæ ratio non percipit, ut demum eo fruantur, qui cum omnia contineat, nullas tamen partes habet: sed totus in omnibus omnia implet.

## CAP. VIII.

Et Sexti quidem argumenta præcipua contra puncti Geometrici definitionem huc usq; examinavimus: duo tamen adhuc restant paucis attingenda. Primum est quod punctum sit pars lineæ: alterum quod sit in loco. ex utroque colligit non esse indivisibile sed divisibile. De primo quidem ita ait Καὶ μὴν ἔνπερ ὅψις τῶν ἀδύλων ἐπὶ τοῖς Φαινόμενα, ἐπεὶ ὁ δυνατὸν ἐν τοῖς Φανομένοις λαβεῖν πινος σημεῖον καὶ πέρας ἀδιάστατον, δῆλον ὡς ὁδὲ ἐν τοῖς νοητοῖς ληφθήσεταί τι τοιοῦτον. Ἐν δὲ γε τοῖς αἰσθητοῖς ὁδὲν ἐστὶν ἀδιάστατον λαβεῖν, ὡς ὁρατήσω, ὥστ' ὁδὲ ἐν τοῖς νοητοῖς. Πᾶν τοίνυν τὸ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ὑποπίπτον πινὸς πέρας καὶ σημεῖον, ὅν τ' ὅτω καὶ λαμβάνεταί πινος ἄκρον ὅν τ' ὅ καὶ μέρος ἐκεῖνος ὅπερ ἐστὶν ἄκρον, ὑποπίπτειν. Ἐὰν γὰρ ἀφέλωμεν αὐτὸ, μειωθήσεταί τὸ ἀφ' οὗ ἡ ἀφαίρεσις. Τὸ δὲ μέρος πινὸς ὑπάρχον, ἐνθὺς καὶ συμπληρωτικὸς αὐτοῦ κατέστηκεν. Ὅ δὲ ἐπὶ πινος συμπληρωτικὸν παντὶς αὐτοῦ τὸ μήκος ἐκεῖνος, καὶ ὁ ἐστὶ μεγέθους αὐξητικὸν, τ' ὅτε ἐξ ἀνάγκης ἔχει μέγεθος. Πᾶν ἀρὰ τὸ ἐν αἰσθητοῖς σημεῖον πινὸς

νός



νός καὶ ἄκρον μέγεθος ἔχον, ὅτι ἐστὶν ἀδιάστατον. ὅθεν εἰ καὶ τὸ  
 νοητὸν μεταβαλλοῦσιν ἀπὸ τῆς αἰσθητικῆς νοῦμεν, (ὅν τῶν καθεστῶς  
 σημείων καὶ πέρασιν γραμμῆς, αὐτὸ νοησομεν) ὅν τὰ καὶ πληρω-  
 πικὸν αὐτῆς ὑπάρχειν, ὥς τε καὶ αὐτὸ διάστατον ἔξῃ πάντως, ὅγε  
 διαστάσεως ἐστὶ περιποιητικόν. *Præterea cum ea quæ mani-  
 festa sunt, cernuntur per ea, quæ apparent, quoniam in  
 iis quæ apparent, sumi non potest alicujus signum & fi-  
 nis quod spatio careat ac dimensione: perspicuum est  
 quod nec in iis quidem quæ cadunt sub intelligentiam  
 sumetur quidem ejusmodi. In sensibilibus autem nihil  
 potest sumi quod non intervallum habeat ac dimensio-  
 nem, ut ostendam: quoniam neque in iis quæ cadunt sub  
 intelligentiam. Cui ergo in sensibilibus accidit termi-  
 num alicujus esse & punctum, illi etiam accidit, & ex-  
 tremum alicujus esse, & partem illius cujus est extre-  
 mum. Quod vero pars alicujus est, etiam ipsum complet:  
 quod autem aliquid complet, omnino auget ipsius longi-  
 tudinem. & quod magnitudinem auget id omnino est ma-  
 gnitudo. Omne ergo quod in sensibilibus est punctum,  
 & alicujus extremum, dimensione non caret. quippe  
 magnitudinem habens. Unde etiam si id quod cadit sub  
 intelligentiam transeundo ex sensibili intelligimus, cum  
 eo intelligimus, etiam ipsum punctum, & lineæ esse ex-  
 tremum, & simul eam implere: ideoque dimensionem ha-  
 bere, si quidem eandem acquirit & efficit. Sed stultis-  
 simum est velle de iis rebus quæ sub sensum non ca-  
 dunt ex sensuum judicio argumentari. Si enim sensu-*

um iudicio standum foret, utique Sol vix bipedalis esset; imo unius tantum pedis magnitudinem æquaret. Tum quoque infinitos errores committeremus in rebus etiam manifestis, si quæ sensibus apparent sine omni rationis examine, pro veris recipi deberent. A sensibilibus ergo ad intelligibilia argumentari, est plane insulsum. Pōnit præterea dari aliquod punctum sensibile: quod falsum omnino est. Quicquid enim sensibus apprehenditur quamvis minutissimum, tamen nec linea est, nec punctum: sed superficies. Verum ut Geometricè procedamus, clara demonstratione manifestum faciemus, extremū & terminū superficierum imo solidi alicujus seu corporis, partem illius minime esse cuius est extremum: quod Sexto plane contrarium est. Sumatur in figura n. V. ABC recta linea secta bifariam in B. & centro B intervallo AB describatur semicirculus ADC, & eodē centro B, intervallo autē EB, minori quam AB, describatur circulus EXF. Extruatur super AB quadratū AD. & super BC quadratū BI. eodē modo super EB & BF construuntur quadrata BG & BH. eductisque diagonalibus BG. BK. BH. BI. jacebunt BK. BG & BH. BI, sibi invicem in directum. moveatur nunc totū planū ACKI in gyrum super axem BD. describet ergo AK. vel CI. cylindrū cuius altitudo AK, diameter ABC vel KDI: EG autem vel FH alium describet cylindrum, cuius altitudo EG, diameter EF vel GH. Triangulum vero KBI. circumactum eodem motu super axem BD. conum describet cuius axis BD, basis circulus descriptus super diametrum KI. Triangu-



gulum quoque BGH conum similiter describet cujus axis BX basis circulus descriptus diametro GH. Denique in hac circumrotatione ADC semicirculus dimidiam sphaeram describet cujus diameter erit AC: & EXF semicirculus etiam dimidiam sphaeram describet, cujus diameter EF. Demantur utrinque portiones sphaericae, cono KBI plane intacto. hoc est, in minori hemisphaerio dematur totum segmentum sphaericum quod conum BLR ambit, planoque EBL designatur. In majori autem hemisphaerio, auferatur segmentum sphaericum quod cylindrum EG, & extremas partes cono BZ ambit, & plano AEGZ indicatur. Remanet ergo in majori cylindro, portio cylindrica quae representatur plano AKD. In minori autem cylindro remanet portio cylindrica representata plano EXG. Totus autem conus KBI manet integer, sicut & conus BGHI. Secentur nunc portiones haec cylindricae & conus ipse, plano quodam parallelo basi majoris cylindri seu AB. verbi g. plano MN. erit ergo portio cylindrica quae representatur plano AMP, aequalis cono BLR. per ea quae demonstrata sunt ab insigni Mathematico Luca Valerio libro secundo de centro gravitatis solidorum Propositione XII. Sed per eandem demonstrationem portio cylindrica representata plano EOL, aequalis erit cono BLR. Atque hoc in omni sectione parallela verum est. Ubique enim portiones haec cylindricae una cum cono secantur, modo planum secans, basi cylindrorum & cono, parallelum fuerit: semper portio cylindrica aequalis erit

G 3

seg-

segmento conico seu cono illi qui à maiore abscinditur. Idque in omnibus partibus verum est quamdiu ulla pars sumpta fuerit. Cum ergo portio cylindrica representata plano ELO sit æqualis cono LBR: & portio cylindrica representata plano APM æqualis sit eidem cono LBR: erunt istæ duæ portiones cylindricæ inter se æquales. Et si sectio in infinitum continuetur plano ad basin parallelo, semper portiones cylindricæ inter se erunt æquales, utpote eidem cono æquales.

Præterea, superficies plana quæ duobus circulis, quorum diametri sunt LR. & OS. terminatur, cuius latitudo representatur recta OL, & est basis portio-  
nis cylindricæ EOL. æquatur plano circulari cuius diameter est LR basis cono LBR. Cum enim BTL angulus sit rectus, quadrata exstructa super LT & TB æquantur quadrato super LB. hoc est super EB vel OT. Æquatur autem latus LT lateri BT, angulus enim BTL rectus, TBL autem dimidius recti: unde TLB etiam erit dimidius recti. Quadratum ergo super LT. æquale erit quadrato super TB. Unde quadratum super OT æquale erit binis quadratis super LT. Quatuor ergo quadrata super OT hoc est quadratum ex OS. æqualia erunt octo quadratis ex LT. hoc est duobus quadratis ex LR. Sunt vero circuli inter se ut quadrata diametrorum. per. 11. XII. Element. Cum ergo quadratum super OS. duplum sit quadrati super LR utpote æquale binis talibus quadratis, ergo & planum circulare cuius diameter OS. duplum erit plani circularis cuius diameter LR. ablatoque communi plano  
cir-



circulari descripto super LR diametro, remanet planum circolare repræsentatum recta OL, quod binis circulis descriptis ab LR & OS terminatur, æquale plano circulari super LR descripto. Est autem circulus super LR basis conii. Planum vero circolare repræsentatum recta linea OL basis portionis cylindricæ EOL. Basis ergo portionis cylindricæ æquatur basi conii. Atque hoc in omni sectione parallela ad basin verum est. Eodem fere modo demonstratur basin portionis cylindricæ APM. æquari basi conii LBR. Iunctâ enim PB rectâ, erit quadratum descriptum super PB æquale quadratis super PT. TB. hoc est quadratis super PT & TL. quandoquidem BT. & TL inter se sunt æquales, ut antea dictum. Est vero PB æqualis AB utpote ejusdem circuli radius. AB autem æqualis MT opposito lateri ejusdem parallelogrammi MB. Unde PB & MT æquales erunt, & quadratum super MT, æquale binis quadratis, uni super PT, alteri super LT. Unde quatuor quadrata super MT, hoc est quadratum ex MN, æqualia erunt quatuor quadratis ex PT, hoc est quadrato ex PQ. & quatuor præterea quadratis ex LT, hoc est quadrato ex LR. Habent autem circuli eam inter se rationem quam quadrata diametrorum. Planum ergo circolare super NM diametrum æquale erit plano circulari super PQ diametrum, & præterea plano circulari super LR diametrum. Hoc est, planum circolare MN, excedit planum circolare LR, plano circulari PQ. Auferatur planum circolare PQ à plano circulari MN. remanet planum circolare  
ter-

terminatum binis circulis descriptis ex MN & PQ diametris, quod repræsentatur MP. recta, estque illud æquale circulari plano LR. Atque hoc in omni sectione parallela ad bases conici & cylindri verum est. Est vero planum circulare super MP, basis portionis cylindricæ AMP. Circulus autē super LR basis conici LBR. Basis ergo portionis cylindricæ in omni sectione parallela ad bases conici & cylindri, æquatur basi conici. Antea vero demonstratum fuit basin circulem OL portionis cylindricæ GEL æquari eidem basi conici nempe circulo, super LR. ergo æquatur etiam basi circulari MP portionis cylindricæ MAP. Idque in omni sectione ad bases parallela verum est. Si ergo portiones hæc cylindricæ in infinitum plano ad bases parallelo sectentur; & conus quoque eodem modo sectetur: erit quævis portio cylindrica cono æqualis, & ipsæ portiones cylindricæ inter se æquales, denique cujusvis portionis cylindricæ basis respondentis sibi conici basi æqualis, & bases portionum cylindricarum inter se æquales. Adeoque si totus cylindrus ACIK plano  $\mu$  sectetur, erit portio cylindrica repræsentata plano  $\mu$  A æqualis portioni cylindricæ  $\gamma$  E  $\beta$ . & singulæ harum æquales cono  $\delta$  B  $\epsilon$ . basesque singularum inter se æquales, nempe planū circulare repræsentatum linea  $\mu$  A æquale plano circulari  $\gamma$   $\beta$ , singulaque plana æqualia circulo  $\delta$   $\epsilon$ . Ita  $\gamma$  A &  $\theta$  E sunt inter se æquales, basesque æquales habent, singulæque harum æquales cono  $\kappa$  B  $\lambda$ , basesque singularum æquales basi conici seu circulo super  $\kappa$   $\lambda$ . Quamdiu ergo illæ partes aut cylindricarum portio-



tionum, aut conī remanserint, tamdiu etiam inter se æquales erunt, modo ut antea dixi. Decrescendo autem cylindricæ hæ portiones terminantur in circulo, & majoris quidem cylindri portio, in circulo descripto super AC, minoris vero cylindri portio, in circulo descripto circa EF. Conus autem terminatur in puncto B. Si ergo extrema hæc seu termini horū corporum ac superficierum, partes revera essent, quod supponit Sextus; utique circulus AC æqualis esset puncto B: etiam circulus EF æqualis esset puncto B: & ipsimet circuli AC & EF inter se essent æquales: quod est absurdum. Quomodo enim semicirculus ADC æqualis esset puncto B? aut si indivisibilium ratio haberi nequeat, quomodo semicirculus ADC æqualis esset semicirculo EXF? At si integri circuli, ex AC & EF descripti, æquales essent: etiam semicirculi invicem æquales forent. Extremum ergo corporis alicujus, sive linea sit, sive punctum; pars non est. quod erat demonstrandum.

Alterum Sexti argumentum est, quod punctus sit in loco. Ἀλλ' εἰώθασιν inquit πρὸς τὰς τοιαύτας ἐπιχειρήσεις ὑπαντάσκειν οἱ περὶ τὸν Ἐρατοσθένη λέγειν, ὅτι τὸ σημεῖον εἴτε ἐπιλαμβάνει τινὰ τόπον, εἴτε καὶ μετὰ τὸ διάστημα τῆς γραμμῆς, οὐκ ἐν δὲ ποιεῖ τὴν γραμμὴν, ὅπερ ἐστὶ ἀδιανόητον. ῥῆν γὰρ νοεῖται τὸ ἀπὸ τίνος τόπου εἰς τινὰ τόπον ἐκτείνεσθαι ὥς περ τὸ ὕδωρ. *Sed ejusmodi argumentis occurrere solent Eratosthenei & dicere, quod punctum neque ullum occupat lo-*

H

cum

*cum; neq; metitur spatium lineæ; sed fluens facit lineam: quod quidem est ejusmodi, ut ne cogitari quidem possit. Fluere enim dicitur ab aliquo loco in aliquem locum extendi, sicut aqua.* Sed male rursus argumentum à sensibilibus ad insensibilia, à corpore ad non corpus ducit. Nam quod corpus, cum fluit, locum mutat, inde non sequitur, ea quæ non sunt corpora, locum mutare fluendo. Imo quomodo locum ea mutare possunt quæ nullum habent? Est enim locus spatium vacuum corpore plenum. At si locus spatium est aliqua re plenum, punctum quidem in loco Physice loquendo non est. Nam cum nullas habeat dimensiones; neque spatium implere potest. Quod si definitionem Aristotelis sequamur, qua is definit locum circumscriptionem continentis certe neque punctum in loco erit. Omnis enim circumscriptio fit vel lineis, vel superficiebus. At id puncto non convenit: ergo nec ullo modo est in loco. Verum quidem est, punctum quando fluit, non ibidem manere ubi erat, sed late loquendo, locum mutare. ut in fig. n. 4 punctum F quando movetur ab F in K, mutat sane locum seu  $\pi\pi\delta$ , aut suum ubi. Et ita quidem punctum est in aliquo loco seu ubi. Verum id non probat punctum esse corpus. Locus enim qui solis corporibus convenit est spatium ut antea dixi: id vero in quo punctum est, nullo modo spatium dici potest. Punctum quidem transeundo seu fluendo spatium aliquod in longum facit. Sed in spatio trinè dimenso, ut loquuntur Physici, non continetur, nec corpus est.

CAP.



## CAP. IX.

Et hætenus Sexti dogmata examinavimus quæ contra Definitionem puncti protulerat: nunc ad ea, quæ de linea & superficie dicit pergamus. Ac primum quidem negat, lineam esse puncti fluxum: quod neq; nos dicimus. Aliud enim est dicere linea est puncti fluxus: & aliud, linea fit ex fluxu puncti. Linea ergo neque punctum est quod fluit; neque fluxus puncti: sed id quod fluxu puncti describitur. Hoc ergo argumentum nihil contra Geometriæ principia concludit: sicut neque illud quod subjungit, non esse lineam multa signa locata per ordinem. id enim antea demonstravimus lineam non componi ex punctis, neque in puncta dividi posse. Fit enim linea, ex fluxu vel unius puncti, vel plurium. sicut illa quæ in plano ex circumgyrato circulo describitur, ex plurium punctorum fluxu nascitur. Aliud enim est quod efficit lineam, aliud ex quo efficit. punctum enim efficit lineam, non ut materia lineæ, sed ut instrumentum potius vel efficiens. Cum ergo hæc omnia contra Geometriæ principia lineæque definitionem nihil concludant: his missis ad ea pergamus quibus absolute evincere conatur lineam non esse longitudinem sine latitudine. Ait vero Σκεψάμενοι δὲ ἡμεῖς ἀκριβῶς ἔῃ ἐν τοῖς νοητοῖς, ἔῃ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς εὐρήσομεν δυνάμενόν τι ληφθῆναι μήκος ἀπλάγιος. καὶ ἐν μὲν τοῖς αἰσθητοῖς ἐπεὶ περὶ ὃ ἀν' λάβωμεν αἰσθητὸν μήκος, τῶν πάντων τε καὶ πάλιν σὺν ποσῶι πλάτει ληφόμεθα. Ἐν δὲ τοῖς

H 2

τοῖς



τοῖς νοητοῖς, καθ' ὅσον ἕτερον μὲν ἑτέρῃ γενότερον δυνάμεθα νοῆσαι  
 μήκος, ὅταν δὲ τὸ αὐτὸ μήκος καθ' ἰσότητά Φυλάττοντες, χρίσω-  
 μεν ταῖς ἐνοίαις τὸ πλάτος, καὶ ἄχρι τινὸς τὸ αὐτὸ ποιῶμεν,  
 ἔλαττον μὲν τὸ πλάτος καὶ ἔλαττον γινόμενον νοήσομεν, ἐπειδὴ  
 δὲ ἀπ' αὐτοῦ φθάσωμεν τερῆσαι τὸ πλάτος τὸ μήκος, ἔκλει ἔδε  
 μήκος φαντασιούμεθα, ἀλλ' ἀναιρεῖται καὶ ἡ τῷ μήκῳ ἐπινόια.  
*Si nos autem diligenter atque accurate consideraverimus, neque in iis quæ cadunt sub intelligentiam, neque in sensibilibus inveniemus ullam sumi posse latitudinis expertem longitudinem. Et in sensibilibus quidem, quandoquidem quamcunque sumpserimus sensilem longitudinem, eam omni ratione & omnino sumemus cum quanta latitudine. In iis autem quæ cadunt sub intelligentiam, quod aliam quidem alia angustiorē possimus mente concipere longitudinem. Quando autem ex æquo eandem servantes longitudinem, cogitatione scindimus latitudinem; aliquatenus quoque idem facimus, ac latitudinem minorem ac minorem concipimus. Postquam autē semel eo pervenerimus, ut latitudine privemus longitudinē, tū neq; longitudinē ulterius cōprehendimus, sed ipsius etiā longitudinis cogitatio simul tollitur. Sed quoniā Sextus longitudinē sine latitudine concipere nequit; agedū ex claris demonstrationibus eam deducamus, atq; intellectuī comprehendendam proponamus. Nam sensibus hæc velle percipere, id vero insanum foret: cum non fallaci sensuum iudicio ac censuræ: sed acutissimi ingenii perspicacitati hæc sint committenda.*

Sit



Sit ergo planum ABCD in fig. 6. super hoc autem perpendiculariter erectum sit parallelogrammum rectangulum AGEF. Aliud autem parallelogrammum huic & quoad singula latera, & quoad angulos æquale, in hoc eodem plano ABCD sit erectum perpendiculariter: ita quidem ut una extremitas FE tangat extremitatem parallelogrammi AGFE. dico extremitates horum parallelogrammorum tangere se inuicem in linea recta. Cum enim FE latus parallelogrammi AGFE sit perpendiculare plano ABCD: ergo si ab altera plani parte, ab eodem puncto E, educatur recta linea, eidem plano ABCD perpendicularis; jacebunt istæ duæ lineæ sibi inuicem in directum per XIII. Primi Elem. Rursum cum latus FE parallelogrammi BHFE sit perpendiculare eidem plano ABCD. ergo recta à puncto E ab altera plani parteeducta ad rectos angulos, in directum jacebit ipsi EF. Latus ergo parallelogrammi AGEF, una cum latere parallelogrammi BHFE, eidem rectæ in directum jacebunt, adeoque unam eandemque rectam lineam facient. (Euclides libro XI. proposit. III. demonstravit, si duo plana se inuicem secant, communem ipsorum sectionem fore rectam lineam. Sed alia methodo usus est, illudque supposuit, quod nos nunc demonstrare volumus, rectam nempe lineam omnis latitudinis esse expertem). Duo ergo hæc plana tangunt se inuicem in recta linea: ideoque & planum seu parallelogrammum AGFE tanget planum ABCD in recta linea AE; & planum seu parallelogrammum BHFE tanget planum ABCD in recta linea BE. Sunt

H 3

ve-

vero AE & BE bases tangentium sc. invicem parallelogrammorum: ergo ipsæ rectæ lineæ AE & BE se invicem tangent, angulumque rectilineum efficient AEB.

Quod si spatium inter BAHG alio parallelogrammo claudatur perpendiculari ad planum ABCD, v. g. plano ABHG, tanget quoque parallelogrammum, singula horum planorum, in recta linea ad AB. AG. & BH. quarum AB una cum BE & AG duos angulos efficiet: & tres AB.BE.EA. triangulū. Tum quoq; HGF triangulum erit æquale AEB. triangulo. Cū enim BA & HG latera sint opposita ejusdem parallelogrammi; & HF & EB, & GF & EB etiam latera opposita ejusdem parallelogrammi: ergo tria horum triangulorum latera invicem æqualia erunt, adeoque tota triangula æqualia. Dividatur parallelogrammum ABHG bifariam recta KL. à parallelogrammo autem AGFE auferatur portio æqualis ipsi ALKG parallelogrammo: & sit parallelogrammum ablatum ab AGFE parallelogrammo, AGXO. Ab altero quoque parallelogrammo HBEF auferatur quoque parallelogrammum LBHK. quod sit HBPM. Sunt autem AGXO & AGKL parallelogramma in eadem altitudine: ergo & bases erunt æquales; adeoque LA æqualis AO. tum quoque LB æqualis erit BP. Quando ergo à parallelogrammis AGFE & BHFE auferūtur parallelogramma æqualia parallelogrammis AK. LH etiā à rectis AE & BC auferuntur rectæ AO & BP æquales rectis AL & LB basibus parallelogrammorum ablatorum. Dico  
au-



autem parallelogramma AGXO & BPHM inclinare quidem invicem, nec tamen concurrere. Si enim concurrerent, utique & bases eorum BP. AO. & summitates HM & GH se invicem tangerent. At vero tum lineæ istæ cum lineis GH & BA triangula duo similia & æqualia facerent, in quibus duo latera non majora essent reliquo. BP enim & AO latera æqualia sunt AL & LB lateribus, hoc est toti AB. Hoc vero est absurdum. Cum ergo nec AO tangat BP nec GX tangat HM. neque planum AOGX tanget planum BHMP. Jungatur termini ipsoꝝ PM.XO. plano parallelo ipsi HGAB. sitq; planū illud parallelogrammū MPOX. dividatur hoc quoq; parallelogrammum bifariam in duo parallelogramma, singulisque horum, æqualia duo alia parallelogramma auferantur à parallelogrammis XOFE & MPFE, sintque parallelogramma ablata XOQR & PMST. dico neque hæc parallelogramma posse se invicem tangere: nisi & lineæ OQ & PT se invicem tangant. At hoc est impossibile: latera enim OQ & PT tum triangulum cum OP facerent, in quo ambo latera simul sumpta æqualia essent tertio: quod est absurdum. Quod si ergo termini RSQT, parallelogrammo quodam jungantur, illudque dividatur bifariam, & æqualia semissi hujus parallelogramma utrinque auferantur: ne illa quidem se invicem tangent propter dictas causas. Superficiebus ergo AEGF & BHFE in infinitum partes demi possunt, ac parallelogrammum ABHG. in infinitum dividi. Si enim progrediendo ut cæptum est, eo quisquam veniret; ( ut nō quo-

quoad sensum, sed quoad intellectum) nihil ultra ipsis parallelogrammis auferri posset: utique haberet eorum extrema. At in extremis se tangunt invicem. Si vero parallelogramma se contingunt; & lineæ AF. BF se contingunt. Si vero se contingunt, faciunt utique, cum basi proxime antecedentis parallelogrammi, triangulum, in quo duo latera erunt æqualia uni, quod est absurdum. Atque hoc ex demonstratione antea allata de puncto liquet. Concludo igitur superficiem in infinitum dividi posse. Tum quoque duo parallelogramma nusquam in superficie aut divisibili in latitudine cōcurrere. Quādiu enim illic superficies aut divisibile est, tamdiu nō concurrunt. Concurrunt ergo in indivisibili, seu in eo, quod nullam latitudinē habet. Demonstratū vero antea fuit contactū horū parallelogrammorum fieri in linea. Ergo linea erit indivisibilis, neque ullam habebit latitudinem. quod erat demonstrandum. Patet ergo ex his non tantum longitudinem sine latitudine concipi posse, sed etiam in natura esse longitudinem sine latitudine, quamvis sensibus comprehendi nequeat: nempe lineam, quæ in duorum planorum contactu est, omni latitudine carere. Sicut autem antea demonstratum est, lineam secundum longitudinem in infinitum dividi posse; nec tamen unquam partes ejus fore puncta: Ita etiam nunc demonstramus superficiem omnem, & quoad longitudinem, & quoad latitudinem, in infinitum posse secari, neque tamen tali sectione unquam ad lineas perveniri. Adeoque, sicut in omni linea, infinita puncta acci-



cipi posse demonstratum est nec tamen ideo lineam ex punctis componi: ita hinc etiam concluditur in superficie infinitas lineas accipi posse; nec tamen superficiem ex lineis componi. quod ut rectius intelligatur, sequenti capite Geometricè demonstrabimus.

## CAP. X.

Concipiatur in figura num. VII. planum aliquod quadrangulare ACX. rectangulum, in quo situs sit cylinder rectus ATSD cujus basis sit circulus DAB: dico primum, cylindrum contingere planum hoc in linea recta. Etenim si cylindrus plano quodam per axem ita secetur, ut idem planum, in extremitate cylindri, tangat planum in quo cylindrus est: erit planum secans cylindrum, ad aliud planum, perpendiculare. Sit enim planum ZFA secans cylindrum per axem: in extremitate autem seu termino sectionis, circa AT. contingat planum ACX: erit planum AFZ ad planum ACX perpendiculare. Cum enim planum hoc, secans cylindrum per axem, sit parallelogrammum, per ea quæ à Sereno sunt demonstrata lib. I. de Sectione cylindri, propositione II: basis vero parallelogrammi, nempe recta AZ, sit diameter circuli ABZD, quæ ideo ipsi AC rectæ est ad angulos rectos per XVIII. III. Elementorum: ac per eandem, etiam basis altera parallelogrammi, quæ est diameter circuli baseos cylindri, sit perpendicularis eidem plano: totum ergo parallelogrammum, quod cylindrum per axem secat,  
I  
erit

erit perpendiculare plano ACX. per propositionem XVII. lib. XI. Elementor. Tangit autem planum hocce planum ACX in linea, per propof. III. XI. lib. Elem. vel per ea, quæ præcedenti capite à nobis fuere demonstrata: ergo, & cylindrus tanget planum in linea. Si enim non tangit in linea, utique tanget in superficie. Habet vero superficies latitudinem, adeoque terminos latitudinis. Si ergo in superficie tangit: utique per axem cylindri duo plana educi possunt, contingentia planum in quo cylindrus est, in linea. Id autem est impossibile. Demonstratum enim est, omne planum, quod per axem cylindri ita ducitur, ut in extremitate cylindri planum tangat, in quo cylindrus est, necessario ad illud planum esse perpendiculare. Si ergo aliud planum v. g. *ab*. per axem cylindri educatur, tangens ACX. in *b*. in extremitate cylindri: ergo angulus FBA erit rectus, adeoque in triangulo AFB erunt duo anguli recti: quod est absurdum. Tangit ergo cylindrus planum in recta linea: & quod, per axem ipsius, planum ducitur, ad contactum plani, in quo est, rectos angulos cum plano eodem facit. Idque in omni cylindro tam magno quam parvo absolute verum est.

Manifestum autem est, si cylindrus super planum aliquod libere circumvolvatur, æquale planum describere parti circumgyratæ suæ superficiei. Circumvolvatur ergo tali modo cylindrus ADTS, planūq; describat AL. æquale quartæ parti superficiei ipsius cylindri. Sit porro alius cylinder minor, cujus basis circulus

EGP



EGP, moveaturque in plano æqualiter, usquedum quarta pars superficiei, suo circumactu, descripserit planum EI. Planum ergo EI, minus erit plano AL: cum hoc, describatur à quadrante superficiei majoris cylindri: illud vero, à quadrante superficiei minoris cylindri. Sit nunc minor cylinder ita majori insertus, ut ambo communem axem habeant, motoque majori cylindro, minor etiam circumrotetur. Quando ergo, quadrante superficiei majoris cylindri peracto, major cylinder tetigerit planum ACX in recta LY, minor cylinder, circumgyrata quarta parte sue superficiei, tanget planum EH in recta Rd: adeoque duo hi cylindri æqualia plana describent, cujus bases erunt æquales, rectæ nempe AL & ER. Plana enim quæ per axem cylindrorum transeunt, tangunt plana in quibus cylindri moventur, ad angulos rectos: ut demonstratum fuit. Tanget ergo planum FG planum ER ad angulos rectos. & planum FB tanget planum AL etiam ad angulos rectos. Jacent vero duo plana FG & FB sibi invicem in directum: adeoque FG planum est pars plani FB. Si enim ducatur planum quoddam *e. f.* tangens cylindrum PGE in recta repræsentata puncto G: planum hoc erit parallelum plano per axem ZFA. Contactus enim cylindri & plani fit ad angulos rectos, ut antea probatum: adeoque angulus eGF æqualis angulo PFG, rectus, recto. Sed eodem modo si ad contactum majoris cylindri in linea ex B, tangens planum ex *g. h.* constituatur, erit planum ex *g. h.* paral-

lelū plano per axem cylindri, & angulus  $gBF$ , æqualis  
 $PFB$  angulo, rectus, recto. atque per eandem ratio-  
 nem  $eGB$  æqualis  $gBG$  angulo. anguli ergo  $eGB$  &  
 $FGe$  æquales duobus rectis, ideoque  $FG$  &  $GB$  bases  
 planorum, in directum sibi jacebunt per XIII. I. E-  
 lem. adeoque ipsa plana in directum jacebunt. Quan-  
 do ergo planum  $FB$  ad planum  $AC$  fuerit perpendi-  
 culare, etiam  $FG$  eidem plano erit perpendiculare. Et  
 cum  $AL$  &  $ER$  sint plana parallela, quando ergo planū  
 $FG$ , perpendiculare fuerit  $AL$  plano, etiā perpendiculare  
 erit  $ER$  plano, per porisma XIII. propositionis inversæ  
 libri XI. Elementor. At si  $FG$  planū perpendiculare est  
 $ER$  plano, etiam  $FB$  erit perpendiculare eidem plano  
 $ER$ : adeoque  $ER$  parallelogrammum æquale  $AL$  pa-  
 rallelogrammo. Pars ergo quarta cylindri minoris, de-  
 scribet planum  $ER$ , æquale plano  $AL$ . Sed antea per  
 se motus cylinder describebat planum  $EI$ . minus plano  
 $AL$ . Ergo eadē cylindri superficies æqualiter circūgy-  
 rata, modo majus describit planū, modo minus: adeoq;  
 minimus cylinder, & perexiguus describit planum,  
 & maximū ac avastissimū, pro diversitate cylindri ma-  
 joris in quo movetur. Describendo autem plana hæc  
 cylinder, semper planum tangit in linea. Et cum in u-  
 traque circumgyratione æqualiter circumgyretur,  
 semperque planis suis alias, atq; alias lineas tangat, in  
 plano subjecto; ergo in ambobus planis æquales nu-  
 mero erunt lineæ, hoc est tot in plano  $EI$ , quot in pla-  
 no  $ER$ . At si superficies ex lineis componeretur, id  
 es-



esset impossibile. Quo plures enim lineæ, tanto major superficies: & quo pauciores lineæ, tanto superficies minor esset. Non ergo superficies componitur ex lineis.

Atque hinc sequitur, si mille lineæ, imo quocunque demum, conciperentur inter se invicem junctæ in latum, nullam tamen superficiem facere, nullamque latitudinem habere; sed unam tum simpliciter lineam constituere. quod paradoxon etiam Geometricè erit demonstrandum, ut Sexti argumenta in contrarium eo facilius falsi convincantur. Ex iis quidem, quæ huc usque sunt demonstrata, id ipsum facile liquet. Nam si linea nullam plane habet latitudinem, ergo quamvis centum mille congregentur lineæ, nullam tamen latitudinem facient: cum non possint id dare quod non habent. Sed quoniam hoc tam accurate intelligi nequeat; sicut neque illud, quomodo quocunque lineæ jungi possunt, & omnes tamen unam lineam constituere: id schemate 8. explicabimus.

Sit solidum triangulare  $ABCRST$  binis parallelogrammis rectangulis, invicem æqualibus, & uno minori; binisq; æqualibus triangulis rectangulis comprehensum, quale figura VII I. exhibet. Duo ergo parallelogramma nempe  $BCRS$  &  $ABTR$  concurrunt circa  $RB$ . Separata vero hæc bina parallelogramma ante contactum, singula suos proprios terminos habent: adeoque terminus parallelogrammi  $BCRS$ , nempe linea  $RB$  ante contactum, differt à termino paral-

I 3

le-

lelogrammi ABRT. adeoque duo isti termini duas lineas distinctas faciunt. Quando vero duo hæc parallelogramma jungi invicem caperint, tunc duæ hæc lineæ etiam quoad latum invicem junguntur. Dico autem nullam latitudinem facere, sed duas lineas junctas unam tantum constituere. Ex iis enim, quæ antea sunt demonstrata, constat, duo hæc plana se in linea contingere, sine omni latitudine. Contingunt se autem invicem suis extremis, quæ sunt duæ lineæ. Ergo duæ lineæ fiunt una, neque conjunctæ in latum superficiem dant, aut latitudinem ullam faciunt.

Sumatur nunc aliud solidum triangulare huic per omnia simile & æquale. Repræsentetur vero, in figura 8. prius solidum, triangulo ABC: hoc vero, triangulo BED. Jam duæ planæ superficies hujus solidi repræsentatæ BE & BD rectis, tangunt se invicem in linea; hoc est, duæ extremitates harum superficierum, seu duæ lineæ junctæ invicem, faciunt unam lineam: ut in priori demonstratum fuit. Jungantur nunc invicem duo hæc solida ABC & BDE versus B. ita ut AB planum ipsi BD plano in directum jaceat. duæ ergo superficies AB & BD binis suis extremis tangunt se invicem in linea B: adeoque ex duabus lineis una fit. Sed etiam superficies EB, tangit superficiem AB, in linea B: & superficies GB, tangit superficiem BD, in linea B. Quatuor ergo lineæ, termini quatuor planorum, nempe AB. CB. EB. & DB, junguntur invicem, in linea repræsentata puncto B: neque tamen ullam latitudinem



nem faciunt, sed omnes unam lineam constituunt. Tangunt enim quatuor hæ superficies se invicem idque in una linea: ut antea fuit demonstratum.

Sumantur nunc alia duo solida triangularia duplo majora quam illa quæ hucusq; consideravimus. Nempe retenta eadem longitudine & latitudine, binisque æqualibus parallelogrammis iisdem positis, crassities seu profunditas augeatur: ita ut pro triangulo ABC rectangulo, sumatur duplicatum isosceles; nempe in figura VII. BCE: & pro parallelogrammo CAST, sumatur duplum hujus, nempe parallelogrammum CEXS. Cum ergo latus parallelogrammi BE, ex constructione, sit æquale lateri BC: totumque parallelogrammum, repræsentatum BE rectâ, toti parallelogrammo, repræsentato BC rectâ, æquale; ergo si solidum triangulare BEC, imponatur solido triangulari BAC, ita ut planum BE imponatur plano BC, tangent duo hæc solida, se invicem, adeoque superficies planæ, in terminis suis CS & EX. & utrumque in BR convenient. Concipiatur solidum hoc alteri impositum esse in figura 8. & esse EFB. Alterum autem solidum huic per omnia simile & æquale sit CQB, impositum solido ABC. Tangent ergo duo plana solidi hujus, nempe CB & QB, se invicem, in linea B. & duo hæc plana tangent duo plana FB & EB in linea B. adeoque quatuor lineæ, termini quatuor horum planorum, componuntur in linea B; nec tamen latitudinem ullam faciunt: in una enim linea solida hæc se tangunt. Sed in eadem linea B tan-

ge-

gebant se antea quatuor alia plana, ut antea est demonstratum. ergo octo lineæ compositæ quoad latum, unam lineam faciunt, sine omni latitudine. Quod si rursus bina solida, posterioribus solidis similia & æqualia, his imponantur: quadrabunt superficies invicem; adeoque  $QPB$  &  $GFB$  tangent se invicem in recta representata in  $B$ . adeoque rursus quatuor rectæ lineæ conjunguntur quoad latum cum prioribus octo: nec tamen ullam latitudinem faciunt, sed omnia hæc solida  $ACB$ .  $CQB$ .  $QPB$ .  $GFB$ .  $FEB$ .  $EDB$ . tangent ab una parte se invicem in linea  $B$ . Si rursus his alia similia & æqualia solida juxta eundem modum imponantur, pro singulis solidis, duas lineas habebimus, quæ prioribus lineis junctæ, unam tantum dant lineam, nec cæteris crassiorē, nec ullo modo quoad latitudinem auctam. Sic in dimidio primate cujus basis  $AKD$ , axis  $B$ , solida triangularia  $POB$ .  $ONB$ .  $NMB$ .  $MLB$ . & ab altera parte  $GBH$ .  $HBI$ .  $IBK$ .  $KBL$ . sibi invicem imponuntur: pro singulis vero solidis duæ lineæ prioribus ad latera apponuntur, adeoque in hoc dimidio primate, viginti octo lineæ junctæ invicem unam dant lineam, neque ullam latitudinem habentem, neque ullo modo auctam. Quod si prisma sumatur quingentorum laterum, seceturque ad singulos angulos plano per axem; habebit etiam in se quingenta corpora triangularia, qualia descripsimus: & si singula corpora hæc se figillatim considerentur, erunt illic mille parallelogramma invicem æqualia: quæ omnia  
se



se tangent invicem versus unam partem in linea. Tangunt vero se invicem suis extremis. ergo mille termini mille parallelogrammorum, hoc est, mille lineæ junguntur invicem ad latus, & unicum tantum lineam faciunt. Quod si prisma mille laterum æqualium sumatur, sectūq; fuerit ad singulos angulos, per axem; erunt illic bis mille lineæ, invicē, in axe conjunctæ, quæ tamē omnes unā lineam dabunt, nec latitudine auctam, nec crassitie : sed omni latitudine & crassitie carentem. Atque hoc ipsum in quibuscunque, quocunque laterum, prismetibus videtur, nisi in solis triangularibus, hoc est, quæ bases habent triangulares. Etenim si per singulos angulos, planis per axem secantur, dabunt tot prismata triangularia, quot latera, quorum quodvis binis extremitatibus tangit aliud, omniaq; prismata tangunt se invicem in recta linea.

Quod autem in lineis hoc modo verum est : etiam in punctis verum ostenditur. Demonstratum enim antea fuit, duas lineas tangere se invicem in puncto. At singulæ harum linearum sua habent extrema, suosque terminos, quibus se invicem contingunt. Si ergo in figura 8. basis prismatis multanguli, solummodo consideretur, quatenus in plura triangula dividitur, quæ omnia in puncto B conjunguntur; patet mille, & centum mille puncta, invicem juncta, nec longitudinem, nec latitudinem, nec profunditatem ullam habere. adeoque omnibus omnino partibus carere, cum nullis dimensionibus mensuretur.

K

CAP.

## CAP. XI.

Atque his probe consideratis, haud difficile est falsitatem argumentorum Sexti intelligere, aliisque ob oculos ponere. Is quidem ex hypothese Mathematicorum, absurdum quoddam colligere vult, quod falsi ipsas hypotheses convincat. Ita enim ait. Μεγαλάνες δὲ διδάσκωμεν ὅτι καὶ ταῖς ἐκείνων αὐτῶν ὑποθέσεις ἔχ' ὅσον τε παροβάνειν τὴν ζήτησιν. Ἄρσκει τοίνυν αὐτοῖς τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὡς καὶ ἀνώτερον ἐλέγμεν τρεφομένην πᾶσιν αὐτῆς τοῖς μέρεσι κύκλους γραφεῖν. ὡς περὶ θεωρήματι ὄντι Συνεκτικῶτάτω μαχόμενόν ἐστι, τὸ τὴν γραμμὴν μήκος ἀπλάτεις ὑπάρχειν. ζητῶμεν δὲ τὸν περὶ τῆς. Εἰ γὰρ καὶ αὐτὸς πᾶν μέρος τῆς γραμμῆς ἔχει σημεῖον, τὸ δὲ σημεῖον τρεφόμενον κύκλον γράφει, δέησι καὶ αὐτὸς ὅταν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ τρεφομένη, καὶ πᾶσι τοῖς ἐαυτοῦ μέρεσι κυκλογραφεῖσα, τὸ διάστημα καὶ μετρητῆς, τῆς ἀπὸ τῆς κέντρως μέχρι τῆς ἐξωτάτης περιφερείας ἐπιπέδου, ὅτε ἡ τοῖς συνεχῆς ἀλλήλοις ὑπάρχειν τὰς καὶ γραφομένους κύκλους, ἢ διεσῶτας ἀπ' ἀλλήλων. Ἀλλ' εἰ μὲν διεσῶσιν ἀλλήλων, ἀκολουθήσει μέρος πῆναι τῆς ἐπιπέδου τὸ μὴ κυκλογραφεύμενον, καὶ τῆς εὐθείας μέρος, τὸ καὶ τῶς μὲν φερόμενον τῶς διαστήματος, μὴ κυκλογραφεῖν δὲ, ὅπερ ἐστὶν ἄβυσσον· ἢ γὰρ ἔχει καὶ τῶς τὸ μέρος σημεῖον ἡ εὐθεῖα γραμμὴ, ἢ ἔχουσα, καὶ καὶ γράφει κύκλον, ὃν ἐκάτερον ὡς τὸν Γεωμετρικόν ἐστι λόγον. Καὶ γὰρ πᾶν μέρος τῆς γραμμῆς σημεῖον



μείον ἔχειν Φασί. καὶ πᾶν σημεῖον τρεφόμενον κυκλογράφειν. Εἰ δὲ  
 συνεχεῖς ἀλλήλοις ὑπάρχειν οἷον αἰτὶς κύκλος, ἢ οἱ ἔτῳς, συνεχεῖς  
 ὡς τὸν αὐτὸν ἐπέχειν τόπον, ἢ ὥστε ἄλλον παρ' ἄλλον τέτταχθαι,  
 μηδενὸς σημεία μετὰ ξὺ πείποντας. καὶ εἰ μὲν τὸν αὐτὸν ἐπέχουσιν  
 τόπον πάντες, εἰς γεννήσεται κύκλος, καὶ διὰ τούτου, τὰ ἐλαχίστῳ  
 κύκλῳ καὶ ὁρὸς τὰ κέντρα κατὰ τῶν, ὁ μείζων καὶ ἐξωτέρῳ καὶ πάντων  
 περιληπτικὸς κατὰ τῶν κύκλος ἴσος γενήσεται, ὅπερ ἐστὶν ἀπεμ-  
 φαῖνον. καὶ τῶν ἔτῳς εἰσὶ συνεχεῖς οἱ κύκλοι ὡς τὸν αὐτὸν τόπον  
 ἐπέχειν. εἰ δὲ ὁ ἄλλοι τυγχάνουσιν ὥστε μετὰ ξὺ μὴ πείπειν  
 ἀμερὲς σημείον, συμπληρώσουσι τὸ ἀπὸ τῆς κέντρας μέχρι τῆς  
 περιφερείας πλάτους. ἦσαν δὲ γὰρ γραμμαί. αἱ ἄρα γραμμαὶ ἔχου-  
 σι καὶ πλάτος καὶ ἐκ ἀπλατεῖς καθέστηκασιν. *Transseamus*  
*autem ac doceamus, quod nec ex illorum ipsorum hypo-*  
*thesibus fieri potest ut procedat quaestio. Placet iis, re-*  
*ctam lineam, si vertatur omnibus suis partibus cir-*  
*culos describere. ut superius etiam à nobis dictum fuit.*  
*Cui quidem constantissimæ eorū speculationi repugnat,*  
*quod linea sit longitudo carens latitudine. Quæramus*  
*autem hoc modo. Nam si, ut est eorum sententia, univer-*  
*sa pars lineæ habet signum, signum autem dum vertitur*  
*describit circumulum; oportebit ex eorum sententia, quan-*  
*do recta linea vertens, & omnibus suis partibus circu-*  
*lum describens, dimetitur intervallum à centro usque*  
*ad extremam planam superficiem, tunc aut inter se con-*  
*tinuos habere circulos qui describuntur, aut inter se in-*

tervallis disjunctos. Sed si sunt quidem inter se intervallis disjuncti, sequetur, esse partem aliquam superficiei, quæ non describitur in circulum, & partem rectæ quæ in hoc quidem fertur spatio, non describit autem circulum: quod quidem est absurdum. Aut enim non habet in hac parte signum recta linea; aut si habet, non describit circulum, quorum utrumque est præter ea quæ dicuntur à Geometris. Dicunt enim omnem partem lineæ habere punctum: & omne punctum, si vertatur, describere circulum. Sin autem existimant circulos inter se esse continuos: aut ita sunt continui, ut eundem locum teneant: aut ut alius juxta alium sit collocatus, ut nullum punctum interjiciatur. Omne enim punctum, quod cogitatione est interjectum, debet eundem circulum describere. Et si quidem eundem tenent omnes locum, fiet unus circulus; & propterea major, & qui est extra omnes, cæterosque comprehendit circulus, erit æqualis minimo circulo & qui est in centro: quod est absurdum. Non sunt ergo circuli sic continui ut eundem teneant locum. Si autem sunt paralleli ut inter eos non cadat aliquod punctum carens partibus: complebunt latitudinem à centro usq; ad superficiem. Quod si compleant; tenent aliquam latitudinem. sunt autem lineæ. Ergo lineæ habent aliquam latitudinem, neque ejus sunt expertes. Sed totum hoc Sexti sophisma in eo consistit, quod lineam ex punctis compositā arbitretur, atque partes lineæ esse puncta: quod falsum esse antea demonstravimus. Ut autem omnia rectius intelligantur,



tur, argumentum ipsum explicabimus. Ajunt Geometrae rectam lineam, si æqualiter omnibus suis partibus promoveatur, tum superficiem planam describere: si vero una extremitate immobili manente, recta linea circumgyretur, circulum ab extremitate altera describi; à tota autem linea, planum circulare. Cum vero in quacunque lineæ parte punctum sumi possit, juxta Mathematicos; ergo quot puncta in linea hac circulum describente, tot etiam erunt circuli. Hi autem circuli vel contigui sunt, vel discreti. Et discreti quidem non erunt: statim enim in spatio isto quod inter duos circulos fuerit, aliud sumetur punctum, quod etiam circulum describet. Si vero omnes hi circuli tangunt se invicem; utique vel unum circulum faciunt, vel plures. Sed non unum. Tum enim minimus circulus qui centro proximus est, æqualis erit circulo exteriori & maximo. Plures ergo invicem distincti sunt circuli, qui quidem totam circularis hujus superficiei latitudinem undique explent. Ipsæ ergo circulares lineæ latitudinem dant, adeoque id habent quod aliis conferunt. Hæc summa est totius argumenti hujus Pyrrhonicæ, quod tamen facile red arguitur, si consideremus, lineam quamcunque in infinitum dividi posse, nec tamen unquam ad puncta perveniri. Ubicunque ergo in linea punctum aliquod sumitur, statim linea ista, in eo puncto, in duas partes secta est. In figura enim n. ix. recta linea AB. mota ea ratione ut punctum A quiescat, B vero moveatur, de-

K 3

scri-

scribit quidem, extremitate sua B, circulum BFG; tota vero linea, planum circulare comprehensum circulo GFB. Neque hæc linea plures facit circulos quam unum, nempe BG. Aliud enim est planum circulare, aliud circulus in hoc plano descriptus. Sumatur nunc in recta AB punctum aliquod C. dividit ergo hoc punctum lineam AB in duas partes, seu in duas lineas, nempe AC & CB. Alia ergo est linea AC, alia vero linea AB. Si enim linea AC moveatur, puncto A immoto, describet circulum CHI. recta vero AB describet circulum BFG. neque duo isti circuli se unquam tangent, neque iidem ullo modo sunt. Inter eos autem linea est CB, quæ planum circulare GFB. IHC motu suo describit. Quod si inter C & B aliud punctum sumatur K, rursus recta AB in duas lineas divisa est, nempe AK & KB. descriptoque, ex AK, circulo, erit inter binos hosce circulos spatium circulare comprehensum circulis ex AC & AB, quod quidem recta KB describitur. Eodem modo si in AC recta, sumantur alia puncta, ut D aut F: erit recta AE, secta in duas partes, in AD nempe, & DC: tum quoque AD in duas lineas secta erit, nempe AE & ED. Quot igitur puncta in linea AB sumuntur: tot etiam partes in eadem linea sumuntur, quæ tamen partes, omnes sunt lineæ, non vero puncta. Linea enim in infinitum dividitur, non quidem in puncta, sed semper in lineas. Ideoque inter singula puncta quæ sumuntur, semper erit linea. Quodcunque enim punctum in hac linea sumitur, vel est



est idē cū priori, vel est aliud. Si idē est cū priori, eundē quoq; circulū describet, adeoq; nullā dabit latitudinē. Si non est idem cum priori, ergo in alia lineæ parte sumitur, rectamque in duas alias rectas dividit. Si enim punctum  $D$ . sumatur in puncto  $C$ . erunt  $AD$  &  $AC$  lineæ æquales. Si vero sumatur alio in loco, vel versus  $A$ , vel versus  $B$ ; erit linea  $AD$  vel major vel minor  $AC$ . Si enim  $D$ . sumatur inter  $A$  &  $C$ , erit  $AD$  minor quam  $AC$ . si autem  $D$  sumatur inter  $B$  &  $C$ . erit  $AD$  major quam  $AC$ . In priori casu aliquid addendum erit ipsi  $AD$  ut æquetur ipsi  $AC$ . in posteriori vero casu, aliquid detrahendum. At illud quod vel additur, vel detrahitur, pars est lineæ; adeoque linea: ut antea fuit demonstratum. Nullum ergo punctum in recta linea sumi potest, ab alio puncto, in hac ipsa linea, diversum, nisi aliam lineam det, priori vel maiorem, vel minorem: adeoque inter duo quæcunque puncta, quæ in eadem linea, diversis in locis, sumuntur necessario erunt lineæ. Et quamvis in his quoque lineis puncta sumi possint, tamen eo ipso hæ quoque lineæ in duas alias lineas dividuntur, idque in infinitum procedendo. Linea enim in infinitum dividi potest, & tamen partes ipsius semper sunt lineæ, non vero puncta, ut antea est demonstratum. Quot ergo puncta in recta linea sumuntur; tot etiam inter eadem puncta lineæ rectæ concipiuntur. idque in infinitum. Quot autem puncta, tot circuli: quot autem lineæ, tot plana circularia, singulis binis circulis interjecta. Adeoque  
non

non circuli dant latitudinem, sed plana circulis inter-  
 jecta, quæ ex motu rectarum linearum oriuntur. Si e-  
 nim circuli latitudinem istam efficerent, utique tan-  
 gerent se invicem. Alias inter circulos spatia essent  
 vacua. At circulus circulum tangit tantum in uno  
 puncto: ut demonstratum Euclidi, proposit. xii. lib. III.  
 Elem. non quidem ex iis quæ nunc disputamus: sed  
 principiis, quæ extra omnem dubitandi aleam sunt po-  
 sita. Qui vero ita se intra contingunt circuli, non  
 possunt habere idem centrum, ut ex iisdem certissimis  
 principiis Euclidi demonstratum est, proposit. vi. lib.  
 III. Elem. At vero circuli omnes in figura IX. ha-  
 bent ex hypothese ipsius quoque Sexti, idem centrum.  
 ergo se invicem tangere nequeunt. At si se invicem non  
 tangunt, neque superficiem explere possunt, adeoque  
 nec latitudinem facere. Non ergo latitudo circuli ex  
 circulis ductis fit, sed ex spatiis & superficiebus cir-  
 cularibus, quæ, rectis, inter puncta quæcunq; sumptis,  
 describuntur. Ex multis autem parvis latitudinibus,  
 magnam componi posse, dubium non est. Non habent  
 ergo vel circulares, vel aliæ lineæ latitudinem. quod e-  
 rat demonstrandum.

## CAP. XII.

Sed opponet forsan aliquis huic nostræ responsio-  
 ni illud Sexti argumentum, quod statim, ante hæc ver-  
 ba, quæ, laudavimus attulit, quo probare conatur, duas  
 lineas invicem in latum conjungi posse, ita ut omni-  
 bus suis partibus se invicem tangant, & distinctæ ta-  
 men



men maneant lineæ. Si enim duæ lineæ hoc modo jungi possunt, quidni & circuli hoc modo jungentur? Argumentum Sexti hoc est. Εἰ γὰρ ἡ γραμμὴ πέρας ἐστὶν ἐπιφανείας μῆκος ἀπλαῖες καθεστῶσα, δῆλον ὡς ὅταν ἐπιφάνεια ἐπιφανείᾳ παρὰ λείῃ, ἢ τοῖς παράλληλοι γενήσονται δύο γραμμαὶ, ἢ μία ἀμφοτέρω. Καὶ εἰ μὲν μία αἱ δύο γραμμαὶ γίνονται, ἐπεὶ ἡ γραμμὴ πέρας ἐστὶν ἐπιφανείας, ἡ δὲ ἐπιφάνεια πέρας (ὥματος, τῶν δὲ δυοῖν γραμμῶν μίας ἅμα γινομένων, γενήσονται καὶ αἱ δύο ἐπιφάνειαι μία ἐπιφάνεια. Τῶνδε δυοῖν ἐπιφανείων μίας ἐπιφανείας γενηθεισῶν, ἐξ ἀνάγκης ἔσται καὶ τὰ δύο (ὥματα ἐν (ὥμα. Τῶν δὲ δυοῖν (ωμάτων ἐνὸς γενομένων, ἡ παρὰ θεσις ἔκ' ἔσται παρὰ θεσις, ἀλλ' ἔνωσις, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ἐπὶ τῶν μὲν γὰρ (ωμάτων δύναται ἡ παρὰ θεσις ἔνωσις γίνεσθαι, κατὰ περ ὕδατος καὶ τῶν οἰκότων τέττω, ἐπὶ τῶν δὲ ἔδαμῶς. Καὶ γὰρ λίθος λίθῳ παρὰ κείμενος, καὶ (ιδῆρος (ιδῆρῳ, καὶ ἄδαμας ἀδαμάντι κατὰ γραμμὴν, ἔκ' ἐνέονται. ὥστε ἔκ' ἀν' ἐκείνῳ αἱ δύο γραμμαὶ μία γραμμὴ. *Si enim linea, quæ latitudine caret, terminus est superficiei; manifestum est, si superficies superficiei adjungatur, vel duas lineas parallelas fieri, vel unam eandemque ambas. Quod si duæ lineæ una linea fiunt; etiam duæ superficies unam facient superficiem; quandoquidem linea est terminus superficiei, superficies autem terminus corporis. At si duæ superficies unam faciunt superficiem, er-*

L

80

go necessarium est, duo corpora unum corpus fieri. Si vero duo corpora, conjungendo se invicem, unum fiunt: appositio non est appositio, sed unio: quod est impossibile. In quibusdam enim corporibus appositio est unio, ut in aqua & similibus: in quibusdam vero corporibus id nequaquam fieri potest. Nam & lapis lapidi appositus, & ferrum, ferro, & adamas, adamantini secundum lineam, non uniuntur invicem. adeoque nec duæ lineæ fiunt una linea. Sed duo plana sibi invicem in linea recta conjungi, antea Geometrice demonstravimus: ex quo quidē principio id sequitur, duo quoque solida plana in superficie se contingere. Quod vero Sextus pro absurdo habet, appositionem & unionem tum eandem rem fore, id quidem, si rectè accipiatur, absurditatem nullam in Mathematicis facit. Si enim duæ lineæ rectæ componentur invicem in directum, faciunt unam rectam lineam, majorem quidem utraque priorum, ambabus vero æqualem. Eodem modo si octo cubi conjungantur invicem, ita ut superficies, superficiei, accurate conveniat, faciunt cubum unum omnibus octo cubis æqualem. Neque video quid absurdi in Geometricis hoc dare possit. Nam quod lapis lapidi, aut ferrum ferro hoc modo non uniatur, de eo in Physicis potius disputandum, vel si mavis in Mechanicis. Geometra enim neque lapides considerat, neque ferrum: sed generaliter omne illud quod in longum, latum, crassumque extenditur: atque eadem facilitate, qua quodvis corpus, in quocunque æquales partes dividit, quæ simul



mul junctæ, æquantur toti; eadem etiam, ex quocunq;  
corporibus, aliud corpus componit, his omnibus æ-  
quale: quod sane Physicus aut Mechanicus nequaquam  
ea arte facere potest. Si enim cubus aliquis materialis  
in octo cubos erit dividendus, cubi isti minores, simul  
sumpti, non erunt æquales, & similes, cubo majori.  
Dum enim secatur cubus, perit aliquid ex materia:  
vel si materia est mollior, forma viciatur. Ideoque par-  
tes hæ omnes compositæ nunquam prius totum exhi-  
bere possunt, propter minutas istas portiones materiæ,  
quæ perierunt. In Geometricis autem, hæc omnia alio  
modo considerantur: neque enim materiales cubos,  
materialibus instrumentis, secat; sed intellectu se-  
cta, eo modo, esse intelligit, ut partes simul sum-  
ptæ æquantur toti. quod in Physica & Mechani-  
ca regulari sectione nunquam præstari potest. Quod  
si punctus dividens aut secans lineam, vel linea  
secans superficiem, vel denique superficies secans so-  
lidum, ullam in sectione dimensionem habuerit: tum  
vel partes lineæ, superficiei, aut solidi, huic dimen-  
sioni respondentes, detrahentur solido; adeoque partes  
solidi justo minores erunt: vel etiam fiet penetratio di-  
mensionum. Sed penetratio dimensionum est impos-  
sibilis: neque enim duo corpora, simul & semel, idem  
spatium implere possunt. Non potest ergo materialis  
cubus ullo modo, in octo cubos, toti æquales, mate-  
rialiter dividi. Et tamen possunt, in quocunque solido  
cubo, octo cubi mente cōcipi, qui simul sumpti, integro

L 2

cu-

cubo æquales erunt. Atque hæc consideratio ad Geometram pertinet. Si vero cubus, ita in octo partes sectus, considerari potest; illud quidem, quod segmenta hæcce facere intelligitur, in quantum secatur, omni crassitie necessario carebit. Stultum ergo est à materialibus ad immaterialia argumentari. Neque rationes Sexti quicquā concludunt quibus sua firmare nititur. Καὶ γὰρ ἄλλως, εἰ ἕνωσις ἐστὶ τῶν δύο γραμμῶν μιᾶς γενομένην, καὶ σύμφυσις τῶν σωμάτων, ἐχθρὴν τὸν χωρισμὸν γίνεσθαι, μὴ κατὰ τὰ αὐτὰ αὐτῶν πέρας, ἀλλὰ καὶ ἄλλα καὶ ἄλλα μέγιστα ποσώμενων, ὥστε καὶ Φθορὰν Συμβαίνειν. *Nam alioqui, quoniam est unio duarum linearum, quæ effectæ sunt una, & corporum coitio & coalescentia: oporteret fieri separationem, non per eosdem ipsorum fines, sed dum avelluntur, per alias atque alias partes, adeo ut etiam contingeret interitus.* Sed hoc quidem, in materialibus ac crassis rebus aliquam daret difficultatem; in corporibus autem, lineisve aut superficiebus Mathematicis, ne considerari quidem meretur. Id enim quod conjungitur, etiam eodem modo Geometricè separatur, quo conjungitur. Neque id corporibus, lineisve Mathematicis ullo modo nocet, quod in compositione eorum fieri existimat Sextus, nempe ut uno termino priventur. Demonstravimus enim antea, lineas quocunque & puncta, invicem conjuncta, unum punctum unamque lineam facere; ita tamen, ut neque lineæ minores fiant, conjunctæ: nec majores, separatæ. Et fa-



fane, in conjunctione hac linearum, non unum extremum perit : sed ambo. Id enim quod antea extremum erat, extremum ulterius non est ; sed medium. Certè quocunq; loco concipiatur, extremum non est. Namque aliàs, res nunquam jungerentur. Conjunctio enim & unio, proprie & accurate loquendo, est, quando duæ res ita inter se junguntur, ut unius extrema fiant extrema alterius. Sic in linea AB, in figura 8, AB & BD conjunctæ sunt, ita ut hæ lineæ duo tantum extrema habeant nempe A & D. ita ut A, quod erat extremum lineæ AB, sit nunc extremum BD. & B extremum lineæ, BD sit etiam extremum AD. Cū ergo in omni conjunctione novi termini acquirantur, debent necessàrio, versus partes conjunctionis, veteres termini & vetera extrema aboleri. Neq; enim plura versus easdem partes extrema esse possunt. Si enim unum est extremum, aliud eo exterius esse nequit. Tum enim prius, extremum male diceretur ; quandoquidem aliquid daretur hoc exterius. Debent ergo, in omni conjunctione & compositione, extrema, in partibus, ubi compositio seu conjunctio fit, necessàrio tolli. Neque enim alias ullo modo conjunctio vera & compositio fieri potest. Contra, si res separentur, novos acquirunt terminos. Est enim separatio seu divisio, quando res sub aliis terminis esse incipiunt, quam antea erant. Non ergo mirum est, si ea, quæ in compositione, terminos suos amiserant ; rursus, in divisione acquirant : cum & ea, quæ composita non concipiuntur, dividi tamen nequeant, nisi no-

L 3

vos

vos terminos acquirant. Atque hoc non tantum in Geometricis verum est; sed etiam in rebus materiatis: sicut cuivis, rerum naturam accuratius consideranti, patet. Non habet ergo linea ullam latitudinem: neque punctum ullam dimensionem.

## CAP. XIII.

Restant adhuc duo Sexti argumenta quibus linearum latitudinem probare conatur, quæ hoc capite examinabimus. Primum est, quod linea necessario latitudinem habeat, quandoquidem latitudinem metitur. Ὅταν γὰρ, ἡ ἀρµένη ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖα στρέφηται, καὶ δι' αὐτῆς κατὰ γράφην κύκλον, τότε ἡταῖ κατὰ πάντων τῶν µερῶν τῆς ἐνθῆς τῆς περιφερείας πλάτους φέρεται ἢ εὐθεῖα γραμμὴ, ἢ ἔ κατὰ πάντων, ἀλλὰ πινῶν. Καὶ εἰ μὲν κατὰ πινῶν φέρεται ἔδε κατὰ γράφει κύκλον, κατ' ὧν μὲν µερῶν φερομένη, κατ' ὧν δὲ ἔ. Εἰ δὲ κατὰ πάντων φέρεται, ὅλον τὸ τῆς περιφερείας κατὰ µετρήσει πλάτος. Πλάτος δὲ κατὰ µετρήσει ἔξει πλάτος. Τὸ γὰρ τῆς πλάτους κατὰ µετρήσει κὸν, ὁφείλει πλάτος ἔχειν ὅ κατὰ µετρήσει. Quando enim quæ à centro ducitur recta linea vertitur & per seipsam describit circulum, tunc aut per omnes partes latitudinis, quæ est intra circumferentiam fertur recta linea, aut non per omnes, sed per aliquas. Et si per aliquas quidem fertur, ne describit quidem circulum, ut quæ per aliquas quidem partes feratur, per aliquas vero non. Sin autem fertur per omnes, dimetietur totam circumferentiæ latitudinem. Latitudinem autem di-

me-



*metiens, habebit latitudinem. Nam quod est dimetiens latitudinis, latitudinem habere debet, qua metitur.* Recta ergo linea circulum dimetiens, juxta Sextum, latitudinem habebit: adeoque linea omni latitudine carebit. Hoc ipsum alio adhuc argumento confirmat: nempe, cum diagonalis quadrati metiatur quadratum, hoc est, linea, planum seu latitudinem; ergo linea latitudinem habebit. Sed omnis fallacia in verbis consistit. Geometræ, cum considerarent omnes omnino magnitudines triplici dimensione comprehendi, cuius dimensionem, peculiare nomen imposuerunt, ut res distinctæ, distinctis vocibus exprimerentur. Ita distantiam nudè consideratam, inter duo quæcunque extrema alicujus corporis, vocarunt longitudinem. Si vero duæ dimensiones simul considerarentur, tum vocabant latitudinem: non quod superficies, in utramque partem, secundum longitudinem mensurari non posset, aut quod non æque versùs illas partes longitudinem haberet, ubi latitudo consideratur, ac versùs illas, ubi longitudo; sed ut longitudinem puram & sine latitudine consideratam, à latitudine distinguerent, hoc est simplicem & primam dimensionem, à duplici seu secunda & composita. Nulla ergo datur latitudo, in qua non sumi possit longitudo. Sed longitudo sine latitudine datur. Ut verbi gratia in cubo figura n. x. sive sumas intervallum ab A ad G, sive ab A ad B, sive ab A ad C, sive denique ab A ad E, vel F, vel D, semper est longitudo quædam; & quocunque modo hoc in-

ter-

tervallum sumatur, potes semper habere longitudinem sine latitudine; si solam distantiam inter duo puncta extrema consideraveris. At vero si in hoc cubo non distantiam duorum punctorum, sed integrum aliquod latus consideraveris, utpote ABGC; habes longitudinem pariter ac latitudinem. In omni autem parte latitudinis datur longitudo. Quoniam enim latitudo est: terminos habet. Termini vero distant invicem, adeoque inter eos longitudo sumi potest. Differt tamen longitudo à latitudine. Deniq; si totum cubum consideraverim, habeo non tantum longum & latum; sed etiam crassum: & tamen in quacunque parte crassitiei est longitudo, quia in quacunque ejus parte sumi potest linea. Habet ergo linea primam & simplicissimam mensuram in se, qua omnes magnitudines mensurantur. Neque negant Geometrae vel latitudinem vel crassitiam linea mensurari: tantum distinctis vocibus distinctas dimensiones indicant. Nempe, simplicissimam dimensionem vocant lineam, qua omnium, quorumcunq; terminorum distantiae sumuntur: magis vero compositam dimensionem, quae juxta duas rationes mensuranda venit, neque unica illa simplicissima absolvitur, superficiem vocarunt. Tertiam deniq;, quae non nisi triplici mensura cognoscitur, corpori tribuerunt. Id ergo quod mensurat aliud, debet sane quantum esse, & dimensionem in se habere: sed non eandem quam mensuratum. Simplicissima enim mensura, & ex qua ceterae dimensiones componuntur, facile com-  
po-



positas metitur. Joculari ergo Sexti argumentum est, quod latitudinem mensurat, illud latitudinem necessario habet. Neque enim linea, sua latitudine mensurat aliam latitudinem; sed in superficie, distantiam tantum terminorum, & ab una, & ab altera parte sumit. Cumque in superficie duæ sint dimensiones, quæ quidem ambæ longitudine constant, & longitudine mensurantur; unam quidem dimensionem Geometræ longitudinem vocarunt, alteram latitudinem, usi hac in re vocibus vulgi. Sapientis enim est verba & voces ex communi hominum usu sumere, inde autem ad suum usum applicare.

Secundum Sexti argumentum est, quod, quoniam cylinder planum in linea tangat, circumvolutus autem planum describat: inde sequatur, lineas omnino latitudinem habere, quandoquidem, planum, hoc est, latitudinem, componant. Τὸν δὲ κύλινδρον φασὶ καὶ εὐθεῖαν γραμμὴν ἀπὸ τοῦ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἐκκυλιόμενον τῇ ἀνὰ μέρος ἄλλων καὶ ἄλλων εὐθειῶν γέσσει καὶ ἀμετρῆν τὴν ἐπίπεδον. Ἀλλ' εἰ καὶ καὶ εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ τοῦ ἐπιπέδου ὁ κύλινδρος, καὶ κυλιόμενος τῇ ἀνὰ μέρος ἄλλων καὶ ἄλλων εὐθειῶν γέσσει καὶ ἀμετρῆν τὴν ἐπίπεδον, πάντως καὶ ἡ ἐπίπεδος συνέστηκεν ἐξ εὐθειῶν, καὶ ἡ ἐπιφανείᾳ τῶν κυλίνδρων πάλιν ἐξ εὐθειῶν πεπλήρωται. Ὅθεν ἐπεὶ ἔχει καὶ ἡ ἐπίπεδος πλάτος, καὶ ἡ ἐπιφανείᾳ τῶν κυλίνδρων ὁμοίως, καὶ ἔκ ἐκ ἀπλάτης, τὸ δὲ πλάτος ποιητὸν ὀφείλει καὶ αὐτὸ πλάτος ἔχειν, διὸ καὶ ὡς ὅτι καὶ εὐθεῖαι

M

γραμ

χαμμαι Συμπληρωτικῶς εἶσαι τὸ πλάτος, ἐξ ἀνάγκης πλά-  
 τος ἔχουσιν, ὥστε μηδὲν εἶναι μῆκος ἀπλάτες, διὰ δὲ τὸ μὴδὲ  
 χαμμαι. *Dicunt etiam cylindrum per rectam lineam  
 tangere planitiem, & evolutum metiri planitiem per  
 partes ponendo alias atque alias rectas. Quod si ita  
 est, omnino etiam ex rectis constat planities: & cylin-  
 dri superficies rursus completa est ex rectis. Unde quo-  
 niam & plana superficies latitudinem habet, etiam cy-  
 lindrica superficies latitudinem habebit, neque erit sine  
 latitudine. At quod latitudinem facit, debet ipsum o-  
 mnino latitudinem habere. Manifestum ergo est, quod  
 quoniam rectæ lineæ expleant latitudinem, etiam ne-  
 cessario latitudinem habeant, ideoque, nec ullam longi-  
 tudinem, expertem latitudinis: & propterea nec lineam.*  
 Sed in hoc argumento vel falsum Sextus supponit, vel  
 male concludit. Antea enim demonstravimus super-  
 ficiem ex lineis non componi, & quamvis infinitæ nu-  
 mero lineæ in quacunque superficie sumi possint: non  
 tamen lineas esse partes superficiei. Idque ex hoc ipso  
 problemate quod Sextus heic proponit, manifestum  
 fecimus: ita ut nemo contradicere possit, nisi qui inæ-  
 quales magnitudines in totidem æquales partes secari  
 posse contenderit. Omnes enim lineæ, quoad secun-  
 dam mensuram, sunt inter se æquales, nec ullam ha-  
 bent latitudinem. Imo si in gratiam Sexti poncremus,  
 lineam, aliquam habere latitudinem, dicendum ta-  
 men omnino foret, lineam, id esse, quod minimam la-



latitudinem habet. Unde, per hanc rationem, omnes lineæ, quoad latitudinem, forent æquales: si quidem, omnes minimam latitudinem haberent. At tum quæ ex pluribus æqualibus latitudinibus componeretur latitudo, major esset, quam quæ ex paucioribus. Demonstratum vero est, & maximam, & minimam latitudinem, æquales numero lineas habere; nec plures in una, quam in alia posse concipi. Ergo ex lineis superficies non componitur, neque lineæ sunt partes superficierû, neque latitudinem ipsius constituunt. Si igitur Sextus inde probare velit, lineam latitudinem habere, quia superficiem constituit, adeoque latitudinem facit: falsum supponit. Neque enim superficies componitur ex lineis. Quod si autem Sextus, hoc ipsum non supponere, sed allata demonstratione probare velit; jam falsum concludit ac male argumentatur. Neque enim sequitur, quoniam cylinder tangit semper planum in linea; evolutus autem, planum describit: quod ideo, vel cylindri superficies, vel planum ex lineis componatur. Etenim in quacunque superficie, tam circulari, quam plana, infinitæ lineæ sumi possunt. Sed si quidem differant invicem, necessario inter eas datur superficies: atque in circulari quidem circularis, in plana autem plana. Ac in plana quidem dari, hinc patet, quod duæ superficies, in infinitum, quoad latitudinem, secari possint, ut antea demonstratum: ideoque nec unquam ulla divisione ad lineam perveniatur. Si enim ad lineam perveniri posset; superficies

M 2

in

in infinitū non divideretur. Atq; hoc in plana quidem superficie antea demonstravimus. In circulari autem superficie id ipsum inde liquet, quod sicut in circulo, per quæcunque puncta, lineæ à centro ad peripheriam educantur; ita in cylindro per quascunque lineas plana ab axe cylindri per superficiem educi possint. Quod si in circulo puncta fuerint diversa, etiam educæ lineæ diversæ erunt, & circa peripheriam distabunt invicem, quæ distantia eo sensibilior, quo major circulus. At si distant, ergo linea inter eas sumi potest. omnis enim distantia lineæ mensuratur. Quod autem in circulo per lineas & puncta, id in cylindro per plana & lineas demonstratur. Nam si diversæ in cylindri superficie lineæ sumantur, plana per axem ad superficiem educæ, diversa erunt; adeoque, circa superficiem, intervalla inter hæc plana; unde & latitudo. Sunt quidem hæc valde subtilia & intellectui non satis obvia, sed mirum illud non est. Infinita enim, indivisibilia & perpetuo ac in infinitū divisibilia, qui intellectu comprehendere se posse existimat, infinitas intellectui suo vires adscribit, pluraque sibi tribuit, quàm habet.

## CAP. XIII.

Et hætenus quidem ea Sexti argumenta examinavimus, quæ contra essentiam puncti, linearum & superficialium proponit: hoc autem capite, ea præ manibus sumere volumus quæ adversus corporis naturam atque essentiam dicuntur. Primo autem loco, argu-



gumentum proponit, quod palmarium existimat, & quo omnia Geometrarum principia demoliri cogitat, quod quidem ex contactu corporum desumit. Duo enim corpora tangunt se invicem quando conjunguntur. Tangunt vero se invicem suis extremis. Vel ergo extrema ista corporum, sunt corpora: vel etiam corpora non se invicem contingunt. At si extrema corporum sunt corpora, ergo superficies habebit profunditatem. Extremum enim corporis est superficies. Si vero superficies habet profunditatem, ergo linea quæ superficiem describit habebit latitudinem, & punctum quod lineam format, non omni carebit dimensione. Hæc summa est argumenti ipsius: quod quidem eo facilius refutatur, quo ea quæ ad extremorum speculationem pertinent antea à nobis manifestius sunt explicata. Demonstratum autem nobis est lineas quidem duas, quando se invicem in angulo tangunt, nullo modo contactum in linea facere, id enim plane esse impossibile: sed in puncto. Et tamen punctum hoc non esse partem lineæ, sed tantum ipsius extremum. Ita quoque in superficiebus demonstratum est, eas se invicem tangere in lineis, nec tamen lineas ex superficiebus componi. Eodem ergo modo, etiam corpora se invicem tangunt non quidem in corpore sed in superficie. Si enim in corpore se tangerent; utique fieret penetratio dimensionum, vel unius corporis superficies alterius corporis superficiem cederet, adeoque vel unius, vel amborum corporum superficies muta-

M 3

ren-

rentur. Quando enim manus manum tangit, non tota manus totam manum tangit: sic enim & arteriæ, & ossa, & muscoli tangerentur invicem, singula à singulis, & omnia ab omnibus. At tum quidem necessario fieret penetratio dimensionum: unumque corpus esset in loco alterius, adeoque duo corpora simul & semel uno in loco, quod est absurdum. Quod si dicam cutim tangere cutim; verum id etiam est, sed non qua corpus est. Etenim cum cutis crassitiem habeat, pars illa quæ pinguedini adjacet illamque tangit, non tangit cuticulam. Ideoque quando cuticula tangit cutim, non totâ ipsius substantiam tangit, sed tantum id quod cuticulæ adjacet. Verum quidem est si cuticula prematur ipsam quoque cutim premi, una cum supposita pinguedine. Sed aliud est motus, aliud contactus. Omnis autem pressio fit cum motu: imo ipsa pressio est motus. Quod si rursus cuticulam consideremus, certum quidem est, eam, extremum corpus in manu esse. Illa tamen parte qua cutim tangit, alteram manum non tangit. Adeoque nec corpore toto tangit, sed tantum extremo sui. Sed in rebus materialibus, omnia tam accurate explicari nequeunt. Corpora enim materialia vix sine aliqua collisione & violentia tangere se invicem possunt. Geometra vero contactum considerat separatum à violentia. Sextus ergo heic antiquum obtinet dum, à materialibus, ad ea quæ materie carent, male argumentatur. Id certum & clarum est, corpora se invicem eo plane modo contingere, quo plana, pla-



plana ; & lineæ, lineas; hoc est suis extremis: neque extremum idem esse cum illo, cuius est extremum, sed omnino differre invicem. Recte ergo dicitur, & corporum, & superficierum, & linearum extrema se invicem tangere: & nihilominus, corpora, & lineas, & superficies, tangere se invicem suis extremis. Quamvis enim superficies, lineæ, & puncta, non sint partes constituentes aut materiales corporum, planorum, aut longitudinum: sunt tamen extrema corporum, & velut partes circumscribentes ac termini. Sicut enim terminus agri, non est pars agri, ex quo ager componitur: nec tamen ager sine termino est, & quorum termini se invicem tangunt, illi etiam agri se invicem tangunt: ita etiam nec corpora, nec superficies lineæve, ex punctis, lineis, aut superficiebus componuntur; & tamen singula singulorum, termini sunt. Aliud ergo pars componens seu constituens; & aliud terminus. Pars componens seu constituens dat rei, id esse, quod est: terminus autem, dat rei esse finitum, neque in infinitum extendi, sed certis limitibus circumscribi. Quibus consideratis, etiam alterum argumentum Sexti sua sponte ruit. Εἰ γὰρ inquit ὁ ὦμα ἐστὶν ὡς φασὶν οἱ Γεωμέτραι τὸ τὰς πρὸς ἑχὸν διαστάσεις μῆκος πλάτος καὶ βάθος, ἢ τῇ χωρίῳ ἐστὶ τῶτων τὸ ὦμα, ὥστε ἄλλο μὲν εἶναι τὸ ὦμα, ἄλλο δὲ τὸ μῆκος τῆς ὠμάτης, πλάτος δὲ τὸ ἐκ βάθους, ἢ ὁ ἀθροισμὸς τῶτων ἐστὶ τὸ ὦμα. Ἀλλὰ χωρίζουσα

ὅσα μὲν τῶν τὸ Σῶμα ἔπιφανόνεστιν. Ὅπως γὰρ μήτε μήκος  
 ἐστὶ μήτε πλάτος μήτε βάθος, ἔκει ἔχ' ὅσοντε νοῆσαι σῶμα. Εἰ δὲ ὁ  
 ἀθροισμὸς τῶν νοεῖται Σῶμα, καὶ ἄλλο ὡς ταύτα ἔδεν ὑπάρ-  
 χει, ἐξ ἀνάγκης, ἐπεὶ ἔχαστον τῶν ἀσώματων ἐστὶ, καὶ ἡ κοίνη τῶν  
 ἀσωμάτων συνοδὸς γνήσεται ἀσώματος. ὥσπερ γὰρ καὶ ἡ σύνθε-  
 σις τῶν σιγμῶν καὶ ἡ συνοδὸς τῶν γραμμῶν ἀσωμάτων φύσει χα-  
 ρετηκῶν ἔποιε φερόν καὶ ἀνέκτυπον σῶμα, ἔτω καὶ ἡ τῶν πλάτους  
 καὶ ἡ τῶν μήκους ἢ τε δὲ καὶ ἡ τῶν βάθους Συνέλευσις, ἀσώματος ἔσα,  
 ἔκ ἀν' ποιῆσαι φερόν καὶ ἀνέκτυπον Σῶμα. εἰ δὲ μήτε χώρις τῶ-  
 ν ἐστὶ τὸ Σῶμα, μήτε ταύτ' ἐστὶν, ἀνεπινόητον ὅσον ἐπὶ τοῖς Γεω-  
 μέτραις γίνεσθαι τὸ Σῶμα. *Si enim corpus, ut Geometrae  
 ajunt, illud est, quod tres habet dimensiones, longitudi-  
 nem, latitudinem & profunditatem: aut corpus est se-  
 parabile ab his, ita quidem ut aliud sit corpus, aliud ve-  
 ro corporis longitudo, latitudo, & profunditas; vel ha-  
 rum dimensionum congregatio est corpus. At verosimi-  
 le non est haec à corpore separabilia esse. Ubi enim neq̃ est  
 longitudo, neque latitudo, neque profunditas, illic non  
 potest concipi corpus. Si vero congregatio horum intel-  
 ligitur corpus, & hoc praeterea nihilest; necessario se-  
 quitur quod cum singula separata careant corpore, et-  
 iam composita corpus non habeant. Sicut enim compositio  
 punctorum, & linearum corpore carentium, nullum  
 corpus solidum & resiliens facit: ita etiam compositio la-  
 titudinis, longitudinis, & profunditatis, rerum incor-  
 po-*



*poralium, non facit corpus solidum & resistens. Si ergo neq; sine his corpus est, neq; hoc est: utique incomprehensibile id est quod Geometræ corpus appellant. Sed antea demonstravimus nec lineam ex punctis, nec superficiem ex lineis, generari: atque eodem modo nec corpus ex superficiebus. Unde nec hoc Sexti argumentum, neque quæ sequuntur, quicquam ad rem faciunt. In corpore quidem omnes tres dimensiones considerari possunt, sed hæ dimensiones corpus non constituunt. Sic color albus, in albo; niger, in nigro corpore, concipitur; neque corpus tale sine colore est: non tamen color est corpus; vel corpus illud est color. Ridicula igitur plane est Sexti nostri consequentia. Si corpus sine his non est, & tamen hæ corpus non constituunt, ergo corpus concipi nequit. Multa enim in corporibus, imo in quibuscunque rebus concipi possunt, ac revera in talibus rebus sunt, quæ tamen essentiam illius rei non constituunt. Diximus antea de colore, infinita corpora esse in quibus color est, & qui sine colore non existunt: nec tamen, color ideo est corpus, aut corpus illud necessario est color. Concipiuntur ergo dimensiones hæ in corpore, imo revera insunt corpori; quamvis essentiam ipsius, ut materia non constituent. Nullum enim corpus est, cui non aliqua sit longitudo, latitudo, & profunditas; imo sine his, ne corpus quidem concipi potest. Non tamen ideo sunt partes, ex quibus corpus componitur: sed dimensiones, quæ omne corpus necessario se-*

N

qvun-

quuntur; quibus sublati tollitur corpus, & quæ sine corpore non subsistunt, sed nihil sunt. Oprandum quidem Sexto foret, ut quod tempus stultissimæ huic sectæ impendit, id discendæ differentiæ, inter substantias & accidentia, tribuisset. Neque enim tam ridicula unquam proposuisset, si ullam rerû vulgarissimarum solidam unquam cognitionē habuisset. Verū ignorasse hæc videtur, non quod ignoraret, sed quod veritatem nulla aliàs fronte impugnare posset, si contra propriam scientiam aliquid diceret. Atque hæc sunt illa, quibus essentiam linearum, punctorum, superficieum, & ipsius denique corporis Geometrici evertere conatus fuit Sextus, sane quam infelicitè. Nihil enim aliud his omnibus præstitit, quam ut saniorum hominum, risui se exponeret, iisq; exemplo esset qui simili stultitia & audacia, certissimas veritates manifestis falsitatibus evertere volunt, non quidem eruditionis aut sapientiæ ostentandæ causa, (sapientia enim veritatis est cognitio & falsitatum fuga; eruditio autem est possessio sapientiæ, non vanitatis aut stultitiæ) sed ut aliis ambitionem prodant suam, & quam vacua cerebro gestent capita, qui ne eas quidem veritates perspicere aut sequi possunt, quæ natura ipsa singulis hominibus implantavit. Sed dum delirando, vana sectantur, non veritatem tantum, sed & omnem quoque famam atq; existimationem perdunt. Sibi tamen placent, sicut & Sextus noster, qui hæc quidem tanti fecit, ut etiam bis poneret, pleraque iisdem verbis, primo quidem in  
hoc



hoc libro adversus Geometras: postea vero in commentariorum libro VIII. ubi contra Logicos de toto & parte, aliisque eo spectantibus disputat. Quædam tamen aliis verbis & paulo plenius explicat, sicut illud quod antea proposuerat de puncto, quod tangere debeat planum in quo lineam describit. Sed de contactu corporum antea satis diximus. Id certum est, si corpus conicū, vel aliud in solidum angulum desinens, imponatur plano cuidam corpori; tum duo ista corpora, tangere se invicem in puncto. Quod quidem ex iis, quæ hactenus demonstrata sunt facile per se intelligitur. Si vero corpus hoc pyramidale aut conicum, eodem situ moveatur super planum hoc in directum: lineam describet. Jam certum quidem est, lineam hanc absque contactu non generari: certumque est, corpus pyramidale, aut conicum, aliud corpus, semper in puncto tangere: nec tamen, vel contactus ille, vel lineæ descriptio sensibus, sed solo intellectu percipitur. Quæ ergo contra priora dicta sunt, ea etiam contra posteriora valent: cum eadem sint argumenta, iisdem verbis concepta; ut non opus fuisset, bis in eodem opere eadem scribere: nisi forte pulchrum duxerit, collectores versuum Homericorum imitari, qui plurimos versus, alicubi bis, alicubi ter, ponunt, iisdem verbis retentis. Sed cætera Sexti pertexamus.

## CAP. XV.

Postquam diu cum lineis, superficiebus, & corporibus, infæliciter luctatum se animadvertisset Sextus;

N 2

tan-

tandē hac pugna relicta, definitionem rectarum linearum, angulique & circuli adgreditur. Compertum fortē habebat nil difficilius Mechanico esse, quam rectam lineam sensibus aliquo modo exhibere. Videbat quoque vix unquam talem angulum, qualem Geometræ considerant, ullis sensibus concipi posse. Ideo heic sperabat facilius sibi cessura omnia. Verum non minus heic spe decidit sua, quàm in prioribus. Videndum tamen quid dicat, & quas rationes proferat. Cōtra rectæ quidem lineæ definitionem hoc argumentū proponit. Recta linea definitur à Geometris illa quæ partibus suis ex æquo interjacet. At vero rectā lineam dari inde probant quod partes æqualiter sitas habeat. Ergo circulū committunt Geometræ, & idē per idē probant.

Καὶ τοὶ ὅτι τὸ πρῶτον καὶ ὁ δεύτερος τὰς ἀποβεβηκυίας ἀντιφάσεις ἐκ ὁλίγα δύναλόν ἐστι λέγειν, ὅτι οὗτοι φασὶν εὐθεῖαν εἶναι γραμμὴν τὴν ἐξ ἴσων τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι κειμένην. ἵνα γὰρ τὰ ἄλλα πᾶρῶμεν ἐκεῖνο μὲν Συμφανές ἐστιν ὅτι τῆς γενικῆς γραμμῆς μὴ ἔσσης, ἧς δὲ εὐθεῖα γραμμὴ γένοιτ' ἂν. Εἴτα καὶ τὸ ἴσον λέγεσθαι διχῶς, καὶ ἓνα μὲν τρέπον τὸ ἰσομέγεθες, καὶ μήτε ὑπερέχον ἐκεῖνος, τῷ ᾧ λέγεσθαι ἴσον, μήτε ὑπερεχόμενον, καὶ τὸ καὶ τὸ πηχυαῖον ζύλον ἴσον εἶναι λέγομεν τὰ πηχυαῖα. καὶ ἕτερον δὲ τὸ ἔχον ἐξ ἴσων τὰ μέρη κείμενα, τῷ ὅτι τὸ ὁμαλόν. Οὕτω γοῦν τὸ ἴσον ἑδάφος καλεῖται ἀντὶ τῷ ὁμαλόν. Διχῶς δὲ τὸ ἴσον προσαγορευόμενος οὗτοι Γεωμέτραι τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὑπογράφουσι.

Φον.



Φοβέσθωσαν, εὐθεΐά ἐστι γραμμὴ ἢ ἐξ ἴσων τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι κει-  
 μένη, ἢ ἔστι τὸ κατὰ τὸ ὁρῶν σημαίνοντα λαμβάνουσιν ἴσον, ἢ τὸ  
 κατὰ τὸ δεύτερον. Ἀλλ' εἰ μὲν τὸ κατὰ τὸ ὁρῶν, τελέως εἰσὶν  
 ἀνόητοι. ὁ δὲ γὰρ ἔχει νοῦν τὸ εὐθεῖαν εἶναι γραμμὴν τὴν ἰσο-  
 μέγεθι τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι, καὶ μήτε ὑπερέχουσαν ταῦτα, μήτε  
 ὑπερχομένην ὑπὸ τούτων. Εἰ δὲ τὸ κατὰ τὸ δεύτερον, δι' αὐτῶν  
 ζητημάτων διδάξουσιν· εἰ γὰρ οὐ μὲν ἐστὶν εὐθεΐα, περιττῶς ἐκ τῶ  
 ὁμαλῶς τε καὶ ἐπ' εὐθείας ἔχειν κείμενα τὰ μέρη· τὸ δὲ ἐπ' εὐ-  
 θεΐας πλὴν κείσθαι ὅτι ἐπὶ μάθων, μὴ ἐπιβάλλοντας τῇ εὐθείᾳ.  
*Quamquam antea non pauca dici possunt, adversus po-*  
*sita eorum principia, ut quum dicunt, rectam esse lineam*  
*quæ sita est ex æquo suis partibus. Nam ut alia præ-*  
*termittamus, illud quidem evidens, quod si non sit linea*  
*in genere, nec recta possit esse linea. Deinde æquum seu*  
*æquale dicitur, duobus modis: uno quidem modo, id*  
*quod est æqualis magnitudinis, & neque id exsuperat,*  
*cui dicitur æquale, neque ab eo exsuperatur. Quomo-*  
*do lignum cubitale dicimus esse æquale ligno cubitali.*  
*Altero autem, id quod habet partes ex æquo sitas, hoc*  
*est planum & æquabile. Ita ergo dicimus, solum æqua-*  
*le, pro eo quod est planum & æquabile. Cum ergo æqua-*  
*le dicatur duobus modis, quando Geometræ rectam li-*  
*neam describentes dicunt ( Recta linea est, quæ sita est ex*  
*æquo suis partibus ) aut in primo significato accipiunt*  
*æquum seu æquale, aut in secundo. Sed si in primo qui-*  
*dem significato, plane desipiunt. Nullum enim habet sen-*

sum, esse rectam lineam, quæ sit æqualis magnitudinis suis partibus, & neque eas superet, nec ab eis superetur. Sin autem in secundo, per id ipsum quod quæritur docebunt; siquidem, quod recta quidem est, ostendunt, quod æquabiliter & in recta linea habeat partes. In recta autem linea aliquid esse situm, dicere non possumus; priusquam ad rectam animum adjecerimus. Sed primum quidem propria verba Geometrarum audienda sunt; inde Sexti argumenta consideranda. Definitiones igitur varias lineæ rectæ recenset Proclus, partim priorum, partim posteriorum Geometrarum. lib. II commentar. in primum Elem Euclidis. Ὁ δὲ Πλάτων ἀφορίζεται τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν, ἥς τὰ μέσα τοῖς ἀκροῖς ἐπιπροσδεῖ. Καὶ γὰρ τότ', τὰ μὲν, ἐπ' εὐθείας ἀλλήλοις κείμενα πάσχειν ἀναγκᾶν, τὰ δὲ ἐπὶ κύκλῳ περιφερείας, ἢ ἄλλης διατάξεως, οὐκ ἀναγκᾶν. Ὅθεν δὴ καὶ οἱ Ἀστρολογικοὶ Φασὶν, τότε τὸν ἥλιον ἐκλείπειν, ὅταν ἐπὶ μιᾷς εὐθείας γένηται αὐτὸς τε καὶ ἡ σελήνη καὶ τὸ ὄμμα τὸ ἡμέτερον. Τότε γὰρ ὑπὸ τῆς Σελήνης ἐπιπροσδεῖσθαι, μέσῃς αὐτῶν τε καὶ ἡμῶν γενομένης. Rectam vero lineam Plato definit cujus media extremis opponuntur. Hoc enim iis necessario contingit quæ in directum sibi invicem jacent. Quæ vero alio modo distant, aliumve situm habent, vel juxta peripheriam circuli, vel alium quemcunque modum, id necessario non contingit. Quam ob causam ipsi quoque Astrologi, Solem tum deficere dicunt, quando in eadem recta linea fuerit cum Luna &

no-



nostro oculo. Tunc eum Lunam, mediam inter illum & nos, utrique (extremo) opponi. Atque hinc statim quis discit, rectam lineam, vere in natura existere, cum tam mirabiles effectus habeat, lumenque illud dulcissimum, & quo nihil in vita jucundius, terris eripiat. Sed de eo velle dubitare, an recta linea in natura esset, id quidem manifesta foret insania. Et Sextus qui Geometras insaniæ arguere conatur, ipsemet stultitiam suam prodit, dum res manifestas, se percipere non posse, demonstrat. Verum definitionem aliorum Geometrarum examinabimus. Euclides quidem his verbis definit Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστὶν ἥ τις ἐξ ἴσας τοῖς ἐφ' αὐτῆς σημείοις κείται. *Recta linea est quæ ex æquo punctis sita est, quæ in ipsa sunt.* Quæ verba ut melius intelligantur, Procli expositionem adponemus. Τὸν δὲ inquit loco laudato, τῆς εὐθείας ὁρισμὸν ὁ μὲν Εὐκλείδης τῶν ἀποδεδωκεν ὃν καὶ παρεθέμεθα καὶ δηλοῖ διὰ τῶν, μόνην τὴν εὐθεῖαν ἴσον κατέχειν διάστημα, τὸ μετὰ ξὺ τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων. ὅσον γὰρ ἀπέχει ἑαυτὸν τῶν σημείων ἑαυτὸν, τοσούτον τὸ μέγεθος τῆς εὐθείας τῆς ἐπ' αὐτῶν περιελκόμενης. Καὶ τῶν ἐπὶ τὸ ἐξ ἴσας κείσθαι τοῖς ἐφ' αὐτῆς σημείοις. Εἰ δὲ περὶ τῆς περιφερείας, ἢ καὶ ἄλλης πινὸς γραμμῆς, δύο σημεία λάβοις, τὸ μετὰ ξὺ τῶν ἀπολαμβάνομενον διάστημα τῆς γραμμῆς, μείζον ἐστὶ τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν. Καὶ πᾶσα γραμμὴ τῶν πεπονητῶν φαίνεται, πλὴν τῆς εὐθείας. Καὶ ὁδεύοντας τὴν ἀναγκαῖον μόνην πορεύεσθαι.

ὅτι καὶ τὴν εὐθεῖαν φασὶ καὶ οἱ πολλοὶ, τὰς δὲ μὴ ἐπ' εὐθείας,  
 πλεῖον τῆς ἀναγκαίας. *Definitionem vero rectæ lineæ  
 Euclides quidem eam dedit, quam nunc proposuimus.  
 Ea vero significat, solam rectam æqualem esse interval-  
 lo, quod inter puncta ipsius sumitur. Quantum enim fue-  
 rit distantia unius puncti ab altero, tanta est magnitu-  
 do rectæ lineæ, quæ his punctis terminatur. Et hoc est  
 ex æquo interjacere punctis, in se sumptis. Si enim cir-  
 ca circumferentiam aliamve quamcunque lineam duo  
 puncta sumantur, intervallum illud lineæ hujus inter  
 duo hæc puncta sumptum, majus erit distantia puncto-  
 rum. Atque hoc omni lineæ contingit, nisi soli rectæ.  
 Vulgus quoque eos, qui itinera conficiunt, ea spatia quæ  
 sunt juxta rectam lineam necessario conficere ajunt,  
 cætera vero, quæ extra rectam lineam sunt, præter ne-  
 cessitatem facere. Videmus ergo quid Euclidi re-  
 ctæ lineæ sit, nempe idem quod verbis paulo clariori-  
 bus exposuit Archimedes, minimam omnium inter  
 eosdem terminos. lib. I. de Sphæra & Cyandro.*  
 Λαμβάνω δὲ ταῦτα τῶν τε αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν γραμμῶν ἐλα-  
 χίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. *Assumo autem hoc, linearum quæ  
 inter eosdem terminos sumuntur, minimam esse rectam.*  
 Proclus loco citato hoc modo definisse Archimedem  
 rectam lineam ait. Ὅ δὲ αὖ Ἀρχιμήδης τὴν εὐθεῖαν ὠρίσατο  
 γραμμὴν ἐλαχίστην τῶν τε αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν. Διότι γὰρ, ὡς  
 ὁ Εὐκλείδης λόγος φησὶν, ἐξ ἴσος κείται τοῖς ἐφ' αὐτῆς σημείοις,  
 διά



διὰ τῆς ἐλαχίστης ἐπὶ τῶν τὰ ἀντὶ πέρατα ἐχουσῶν. Εἰ γὰρ εἴη τις ἐλάττω, ἢκ' ἐξ ἴσος κείσεται τοῖς πέρασιν αὐτῆς. *Sed* ὁ Archimedes rectam definiuit lineam minimam earum quæ eosdem habent terminos. Quoniam enim (ut ex libro Euclidis constat) recta ex æquo suis punctis interjacet, propterea etiam minima est omnium eosdem terminos habentium. Si enim minor ulla esset alia, utiq; prior non ex æquo suis terminis interjaceret. Ex quibus liquet, quomodo Euclidis definitio sit explicanda ac intelligenda, & quid recta linea Geometris proprie sit, nempe illa linea, quæ, distantia, duorum punctorum lineam terminantium, plane est æqualis. Dicit autem Euclides rectam hanc ἐξ ἴσος κείσθαι τοῖς ἐφ' αὐτῆς σημείοις, non vero ait τοῖς αὐτῆς σημείοις. Nempe Geometræ sæpenumero supponunt rectam lineam in infinitum productam. Quæ autem in infinitum educitur, terminos non habet, adeoque nec puncta terminantia. Inter puncta ergo hujus extrema nulla potest sumi distantia, quia puncta ipsa non dantur. Rectæ ergo lineæ infinitæ non conveniret definitio Euclideæ, si quidem dixisset, eam esse rectam quæ punctis seu extremis suis ex æquo interjacet, seu quæ distantia inter sua extrema æqualis esset: cum infinita distantia haberi nequeat. Dixit ergo τοῖς ἐφ' αὐτῆς σημείοις punctis quæ in seipsâ sumuntur. Nimirum quocunq; in loco duo puncta in recta linea sumuntur, distantia horum punctorum est æqualis rectæ, quæ puncta hæc

O

con-

conjungit: & recta, æqualis distantia. Liquet igitur ex his mala fide Sextum definitionem Geometricam rectæ lineæ citasse, cum ait, rectam esse ἥντις ἐξ ἴσων καὶ ται τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς μέρεσι *quæ ex æquo partibus in ea sumptis interjacet.* Aliud enim est punctum, aliud pars lineæ. Neque verum est quod ait, Geometras explicare rectam lineam per planum, & planum per rectam lineam, hoc est circulum committere: utrumque enim falsum est. Rectam enim lineam explicant per minimam distantiam à suis extremis: & planam superficiem, etiam per minimam distantiam à suis extremis: utrumque optime & ex natura rei. Unica enim linea inter duo puncto sumi potest omnium minima, atque hæc recta est. Tum quoque unica tantum superficies inter duas lineas sumitur, omnium minima, quæ etiam superficies est plana. Atq; hæc adeo per se clara sunt ac manifesta, ut pluribus ea verbis explicare velle; esset de communi hominum notitia dubitare.

Nec saniora sunt quæ de natura anguli disputat. Οἷος δὲ ἐστὶν ὁ περὶ τῆς εὐθείας λόγος τοῖς γε γινώσκουσιν ἀνὰ χεῖρ' ὁ περὶ τῆς γωνίας. Πάλιν γὰρ ὅταν ὑπογράφοντες λέγωσιν ὅτι γωνία ἐστὶ δυοῖν εὐθειῶν μήκει ἄλληλα κειμένων τὸ ὑπὸ τῇ κλίσει ἐλάχιτον. ἢ τοι ἐλάχιτον λέγουσι τὸ ἀμερὲς (ᾧμα, ἢ τὸ καὶ αὐτῆς σημεῖον καὶ τιγμὴν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ἀμερὲς (ᾧμα ἐκ ἀν' ἐπιποιεν, ἐπεὶ περὶ τῶν μὲν ἔδδ' εἰς δύο μέρη δύναται διαιρεῖσθαι· ἡ δὲ γωνία καὶ αὐ-



αὐτὸς ἐπ' ἀπειρον τέμνεται, καὶ ἄλλως τῆς γωνίας ἢ μὲν μείζονα  
 φασὶν εἶναι ἢ δὲ μικρότερον. τὸ δὲ ἐλάχιστον ὥματὸς ἔστιν ἐν  
 βραχύτερον, ἐπεὶ ἐκείνο ἀλλ' ἢ τὸ γένεσθαι ἐλάχιστον. Λείπε-  
 ται ἄρα τὸ καὶ αὐτὸς σημειῖον εἶναι λέγειν. ὁ καὶ αὐτὸ τῶν ἀπόρων.  
 Εἰ γὰρ πάντῃ πανταχῶς ἀδιάσπαστος, ἢ διαμετρήσεται ἡ γωνία,  
 ἢ μὴν ἔδε μείζων πῶς ἔσται ἢ ἐλάσσων γωνία. Ἐν γὰρ τοῖς μηδε-  
 μίαν ἔχουσι διασπασιν ἔκ ἀν' εἰς κατὰ μέγεθος διαφορὰ. ἄλλως  
 τε εἰ μετὰ τῶν εὐθειῶν πίπτει τὸ σημεῖον, διορίζει τὰς εὐθείας.  
 διορίζον δὲ ἔκ' ἔσται ἀδιάσπαστος. *Quale autem est quod de re-*  
*cta dicitur, tale est etiam quod dicitur de angulo. Rur-*  
*sus enim quando dicunt describentes, Angulus est dua-*  
*rum linearum non in directum jacentium, id quod est*  
*minimum sub inclinatione: aut minimum dicunt corpus,*  
*quod caret partibus, aut quod est, ut ipsi volunt, signum*  
*& punctum. Sed corpus quidem carens partibus non di-*  
*cent, quoniam id nemo potest in duas partes dividere.*  
*Angulus autem ut ipsi volunt secatur in infinitum. Et*  
*alioqui ex angulis alium quidem dicunt esse majorem,*  
*alium vero minorem. Minimo autem corpore nihil est*  
*brevius: cum aliàs non illud, sed hoc minimum tum esset.*  
*Restat ergo ut dicant id quod est, ut ipsi censent, signum:*  
*quod ipsum quoque cadit in dubitationem. Si enim sig-*  
*num est ejusmodi, ut nullo modo nec ulla ratione ullum*  
*suscipiat intervallum ac dimensionem: non dividetur an-*  
*gulus. sed nec erit ullus major aut minor angulus. Iis*  
*enim quæ nullum habent spatium ac dimensionem, non*

*potest esse ulla in magnitudine differentia. Et alioqui si inter rectas cadit punctum, distinguit rectas Quod autem distinguit, non utique caret dimensione. Sed videtur heic Sextus ut Geometras argueret, ipse sibi definitionem confinxisse. Sane cum non unum aut alterum Geometrarum de ponte dejicere, sed totam Geometriæ scientiam vanitatis arguere in animo haberet: debebat utiq; illam maxime definitionem oppugnare, tali quæ ab illo Geometra esset proposita, quem cæteri omnes Mathematici pro optimo ac solide docto haberent. Euclides quidem multo ante Sextum Empiricum tempore sua conscripserat, magnamque penes omnes Mathematicos auctoritatem obtinuerat. Debebat utique Sextus, cum contra Geometriam in genere aliquid moliretur, optimum in ea scientia maximæq; auctoritatis scriptorem impugnare. Definit autem Euclides angulum rectilineum his verbis*  
*Επίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπὸ κοινῆς ἀρχῆς καὶ μὴ ἐπὶ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.*  
*Planus angulus est, duarum, quæ in eodem plano sunt, linearum, se invicem tangentium, & non in directum jacentium, ad invicem inclinatio. De minimo Sexti nulum heic verbum. Ideoque nec argumentum ipsius contra Geometriam est. Sunt tamen quædam in hoc ipso Sexti argumento falsa, de quibus antea monitum. Proponit vero aliam quoque definitionem quam impugnatur. Verum neque est Euclidis, sed aliorum Geome-*  
 me-



metrarum, ut in sequentibus docebimus. Ἀλλ' εἰώθασιν  
 τινες ἐξ αὐτῶν γωνίαν λέγειν τὸ ὑπὸ τῇ κλίσει ᾠρῶν διάστημα.  
*Sed solent inquit quidam ex iis angulū appellare primū  
 intervallum sub inclinatione.* At cum alia definitio me-  
 lior & magis naturæ rei conveniens apud alios Geo-  
 metras daretur: non debebat ob paucorū imperitiā  
 tota scientia male audire. Atque hæc quidem Sextus  
 contra anguli definitionem proponit, quæ tamen  
 contra Geometras nihil concludunt, cum præstantis-  
 simi Geometræ alias definitiones habeant. Quoniam  
 vero nobis propositum est non ea tantum inquirere  
 quæ ab Sexto contra Mathematicos dicuntur, sed et-  
 iam illa quæ ab aliis vel proponuntur, vel proponi pos-  
 sunt: sequenti capite varias præstantissimorum Ma-  
 thematicorum sententias de anguli natura ac defini-  
 tione in medium adducemus, ut veritas rei omnibus  
 pateat.

## CAP. XVI.

Quam difficile sit atque arduum naturas rerum ac-  
 curata definitione explicare; illis cognitum est qui  
 naturam paulo diligentius sunt rimari. Vix enim quic-  
 quam in tota natura est, quod ita definiri possit ut ni-  
 hil in ea definitione sit vitiosum. Res enim vulgatis-  
 simæ & ubivis obviæ difficillime cognoscuntur: ideo-  
 que nec facile definiuntur. Lapides natura tanta co-  
 pia produxit, tantaque varietate, ut vix ullus sit mor-  
 talium qui ignoret, quid lapis sit. Nemo tamen per-

fectam omnibusq; numeris absolutam lapidis definitionem unquam dedit, aut dare potest. Quid humano generi magis necessarium, ideoque majori copia à divite natura procreatum, quam fruges & fructus? Neque tamen vel tritici, vel secalis, vel hordei accuratam definitionem quisquam mihi dederit. Descriptiones quidem qualescunque harum aliarumque rerum habentur, & definitiones quas vocant causales: tales vero quales jure debebant esse, aut quæ naturam harum perfecte explicant, non dantur: eo quod natura ipsa perfecte cognita non est. Quot plantæ, arbores, gemmæ in natura exstant, quarum sola exterior species & figura cognita est? cætera latent, ideoque nec ullo modo talium rerum definitio dari potest. Neque tamen ideo quisquam sanus hæc in natura esse negaverit, aut nihil plane esse dixerit, ipso rûve externa accidentia ut falsa damnaverit: eo quod accurata rei definitio cognita non sit. Ita quoque in Geometria non sequitur, angulum nihil esse, aut vanam de quantitate anguli quæstionem à Geometris moveri; eo quod natura & essentia angulorum cognita non sit, vel saltem verbis plene atque accurate explicari nequeat. Ipsimet quidem Veteres Geometræ non conveniunt in definitione anguli, neque satis accurate explicare possunt, ad quod prædicamentum referri debeat, cum in tanta angulorum diversitate non omnes sub eodem genere comprehendi posse videantur. Notatum hoc Proclo, & ab eodem conciliatio atque explicatio hujus difficul-



cultatis quæsitæ, commentario in hanc definit. Euclidis. Neque tamen omni ex parte mihi satisfacit. Quicquid sit, de angulo constat, eum in natura rerum esse, & omnino unum angulum altero esse majorem, quod Geometræ supponunt. Nam operosa illa quæstio de natura & definitione anguli Geometræ necessaria non est. Sufficit novisse quam rem Geometra voce anguli designet: quod quidem ex descriptione ab Euclide allata satis liquet. Aliud ergo est quærere an angulus sit: aliud, quid sit, & in quo prædicamento. Geometræ supponunt angulum esse: unumque angulum altero majorem. Quod sane neque ab ullo mortalium negari potest. Naturam quoque anguli eo modo explicant, ut plenior cognitio illius rei Geometræ non sit necessaria. Atque in his conveniunt Geometræ. Quando vero de eo disputatur in quo prædicamento angulus sit, jam non ulterius Geometrica quæstio agitur, sed Logica vel Metaphysica. Hoc ergo quod Sextus urget contra Geometras, non Mathematicum est: sed Logicum aut Metaphysicum.

Ut vero omnis scrupulus Lectori eximatur, placet hanc quoque controversiam paucis absolvere. Eudemus Peripateticus in libro quem de angulo scripsit, in prædicamento Qualitatis angulum esse existimabat, si quidem fides habenda erit Proclo, cujus verbis potius quam meis hæc proponam. Lib. II. comment. in I Euclidis. Εὐδήμος μὲν ὁ Περιπατητικὸς βιβλίον περὶ γωνίας γρά-

φας

τας ποίηται αὐτὴν εἶναι Συνεχόρησεν. Γένεσιν γὰρ γωνίας ἐπι-  
 νοᾶν ἢ ἄλλην εἶναι Φησὶν ἢ τὴν κλίσιν τῶν γραμμῶν. Εἰ δὲ ἡ  
 εὐθύτης, ποίότης, καὶ ἡ κλάσις, ποίότης, ἐν ποίότητι ἔχουσιν  
 αὐτὴν τὴν γένεσιν πάντως εἶναι ποίηται. *Eudemus quidem  
 Peripateticus librum de angulo scribens, in Prædica-  
 mento Qualitatis eum esse affirmavit. Cum enim an-  
 guli ortum ac constitutionem consideraret, non aliud  
 angulum esse pronunciabat quam linearum inclinatio-  
 nem. Si vero rectitudo est qualitas, & fractio quoque est  
 qualitas; utique angulus, cujus constitutio in qualitate  
 consistit, omnino erit qualitas. Verum multa sunt ex  
 quibus probari potest angulum non esse qualitatem.  
 Nunc quidem ea tantum recensebo, quæ à Proclo ad-  
 feruntur paulo ante hæc verba. Καὶ αἱ γωνίαι ποιότητες  
 δῆλον ὅτι ἂν εἴεν. Τῆς γὰρ ποιότητος τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον  
 οἰκεία πάθη, καὶ τὸ ἴσον καὶ ἄνισον. Ἐδει τοίνυν μὴ λέγειν ἄνισος  
 γωνίας, καὶ τὴν μὲν μείζονα, τὴν δὲ ἐλάττωνα, ἀλλ' ἀνομόιους, καὶ  
 τὴν μὲν μᾶλλον γωνίαν, τὴν δὲ ἥσσον. Ταῦτα δὲ ὅτι τῆς τῶν Μα-  
 θημάτων ὑπάρξεως ἐστὶν ἀλλότρια πανήπυχα φαίνονται. Πᾶσα γὰρ  
 γωνία τὸν αὐτὸν ἐπιδέχεται λόγον, καὶ ἔχι ἡ μὲν ἐστὶ γωνία μᾶλ-  
 λον, ἡ δὲ ἥσσον. *Quod vero anguli qualitates non sint  
 manifestum. Qualitatis enim propria affectio est, susci-  
 pere magis ac minus; non vero æquale esse aut inæqua-  
 le. Alioqui, non oportebat dicere angulos esse inæqua-  
 les, & unum quidem majorem alterum vero minorem:*  
sed*



sed dicendum foret angulos esse dissimiles, & hunc quidem magis esse angulum, illum vero minus. At vero hæc Mathematicæ constitutioni plane contraria esse, manifestum est. Omnis enim angulus eandem habet rationem, neque unus magis est angulus, alter vero minus. Plura non addam: cum ex his clarum sit, angulum in prædicamento qualitatis non esse. Verum neq; ad quantitatem referri debet: neque angulus magnitudo dici. Placuit id quidem Plutarcho Mathematico, qui ante Apollonium floruit, ipsumq; Apollonium in eam sententiam secū pertraxit, ut ex eodē Proclo discimus, qui etiam definitionem illam anguli nobis dederunt, quam Sextus ultimo loco adfert, quamvis verbis nonnihil immutatis. Προσότης δὲ λέγεται αὐτὴν ὅσοι φασὶν τὸ πρῶτον διάστημα ὑπὸ τὸ σημεῖον εἶναι τὴν γωνίαν ὧν καὶ ὁ Πλάτωνος ἐστὶν εἰς τὴν αὐτὴν δόξαν συνωθῶν καὶ τὸν Ἀπολλώνιον. Δεῖ γὰρ εἶναι ἡ φησὶ διάστημα πρῶτον ὑπὸ τὴν κλάσιν τῶν περιεχουσῶν ἐπιφανειῶν. Angulum vero quantitatem illi dicunt, quibus definitur, primum intervallum sub puncto. Inter quos est Plutarchus, ipsum quoque Apollonium in eam compellens sententiam. Dicunt enim, oportere aliquod intervallum primum esse, inter sectionem linearum aut superficierum, quæ angulum comprehendunt. Sed hæc sententia non tantum ab ipso Sexto satis bene refutatur, ut antea vidimus, verum etiam à Proclo paucis verbis rejicitur. Ita enim ait. Καὶ τοιγὰρ συνεχὲς ὄντος τῆς ὑπὸ τὸ σημεῖον δια-

P

στήμα-

ἡμαῖς, ἀδύνατον τὸ πρῶτον λαβεῖν. Ἐπὶ ἀπειρον γὰρ πᾶν διάστημα  
 διαμετρὶν· ὡς τὰς καὶ ἐὰν ὅποσιν ἀφόρισωμεν τὸ πρῶτον, καὶ δι' ἐκεί-  
 νας γωνίας ἀγάγωμεν, γίνεσθαι τρίγωνον, ἀλλ' ἔμειν γωνίαν.  
*Enimvero si intervallum illud quod sub puncto est con-*  
*tinuum fuerit, primum nulla ratione sumi potest. Omne*  
*enim intervallum in infinitum dividitur. Propterea, si*  
*quantumcunque intervallum sumamus, illudque ut pri-*  
*imum separemus, angulum per id ducentes, fit triangu-*  
*lum, non vero unus angulus.* Verba Procli paulo sunt  
 obscuriora, ideoque paucis ea explicabimus. In figur.  
 n. II. si angulus CAB dicatur intervallum primum sub  
 puncto, erit ergo vel CB, vel FH, vel KI, vel MN, vel  
 PQ, vel ST, vel XY, vel αβ, vel δε, vel si in infinitum pro-  
 grediaris, spatiū tribus quibuscunq; lineis comprehen-  
 sum, quarum duæ sunt partes linearum AC & AB. ter-  
 tia autem alia quædam recta. At vero tale spacium  
 non unum dat angulum, sed integram format figuram,  
 nempe triangulum. Quodcunque ergo intervallum  
 ab intervallo CAB, ablatum fuerit, anguloq; CAB at-  
 tributum: id non angulum formabit, sed triangulum,  
 nempe vel AFH, vel AKI, vel AMN, & sic in infini-  
 tum. Neque ullum intervallum sumi potest primum,  
 cum totum hoc intervallum in infinitum dividatur. At  
 in infinito nihil est primum: cum eo semper aliud prius  
 dari possit; si quidem divisio in infinitum procedat.  
 Quod si intervallum hoc continuum sumatur, neque  
 dividatur, tum nihil in eo primum est, quandoquidem  
 omnia



omnia simul sunt. Mala est ergo & Plutarchi & Apollonii definitio, ab ipsis Geometris rejecta: ideoque non opus fuisset hanc ut Geometricam à Sexto refutari. Carpus vero Antiochenus angulum quidem ad quantitatem retulit, nec tamen, vel superficiem, vel lineam esse voluit, quod recenset & uno verbo refutat Proclus. Κάρπος δὲ ὁ Ἀντιόχηνος πόσον μὲν εἶναι Φησὶ τὴν γωνίαν καὶ διάστημα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν· καὶ ὅτι ἐν διεστώσι τῶν γραμμῶν εἶναι τὴν γωνίαν. οὗ γὰρ πᾶν τὸ ἐν διαστάσει ὑπάρχειν γραμμὴν. τῶν δὲ πάντων παραδοξότατον, εἶναι πλεονέκτης ὅτι ἐν διαστάσει ἔξω γραμμῆς. *Carpus vero Antiochenus angulum quidem quantum esse dicit, & intervallum linearum aut superficierum quæ eum comprehendunt. Et hoc quidem intervallum juxta unum punctum distare: nec tamen ideo lineam esse. Hoc vero omnium maxime absurdum est. dari magnitudinem, quæ juxta unum punctum distat, neque tamen sit linea.* Proclus rem unico tantum verbo indicare voluit, nimirum, perabsurdum esse, si quis vellet affirmare, ullam magnitudinem, præter lineam seu longitudinem, in iis posse considerari, quæ distant quidem invicem, sed tamen juxta unicam mensuram. Angulum vero magnitudinem non esse vel hinc patet. Si enim magnitudo est: ergo cum alia magnitudine potest conferri. Quæ vero comparantur invicem, habent quoque rationem inter se. Magnitudines autem quæ rationem invicem habent, possunt se invicem exedere

si multiplicentur: per Def. IV. libr. V. Elem. Eucl. Ergo si angulus est magnitudo, potest etiam multiplicatus quemcunque alium angulum excedere, idque in infinitum, & tamen semper erit angulus. At in figura numero. V. si angulus EBL triplicetur, excedit quidem angulum EB: si vero quadruplicetur, desinit esse angulus. Lineæ enim EB & BF in directū jacent, adeoque angulum non constituunt. Quod si quintupletur educta recta BL. in  $\epsilon$ . erit  $EB_{\epsilon}$  angulus æqualis LBF angulo, utpote ad verticem. Exterior vero angulus desinet esse id quod erat. Hoc idem argumentum, sed in angulis cornutis, demonstratum habes, apud Proclum, loco laudato, quod inde peti potest. Angulus ergo non est quantitas.

Verum neque in Prædicamento Relationis est. Si enim angulus nil aliud esset quam relatio, utique in unoquoque angulo, unica tantum atque eadem esset relatio. Unus enim idemque angulus unam eandemque faceret relationem. At in angulis mixtis v. g. ex recta linea & circulari, vel eo, quem cornutum vocant, alia est relatio rectæ lineæ ad circularem, & alia circularis ad rectam. Cum ergo duplex sit relatio, ergo idem angulus non unus esset angulus sed duplus, sive duo anguli: quod est absurdum. Proclus hæc alio exemplo demonstravit, ex hemicono deducto, cujus angulus verticalis componitur ex angulo trianguli plani, & ipsius præterea superficie coni. Sed nostra demonstratio clarior est. Non est ergo angulus in prædicamento Relationis.



nis. Neq; tamem verū illud videtur quod Proclus affirmat, Euclidem, eosq; omnes, qui angulum inclinationem definiunt, in Prædicamento Relationis ipsum posuisse. Εὐκλείδης δὲ καὶ ὅσοι κλίσιν εἰρήκασιν ἐν τοῖς πρὸς πικαλέγχοι. *Euclides vero, & quotquot inclinationem angulum dixerunt inter relata ponunt.* Sane nusquam hoc dixit Euclides: saltem, inter ea opera, quæ exstant, id nusquam legitur. Neque vero inclinatio ad Prædicamentum Relationis proprie spectat, sed ad illud, quod Latini vocant prædicamentum Situs: Aristoteli dicitur κῆνθα. Est enim omnis incliatio situs aliquis, quæ si fuerit duarum rectarum linearum in eodem plano, oritur angulus planus rectilineus: si fuerit duarum linearum curvarum, oritur angulus curvilineus. Quod si fuerit trium pluriumve superficierum, oritur angulus solidus. Quoniam vero in situ varia considerantur, nempe, res ipsæ quæ situm habent, & distantia rerum, quæ intali situ sunt: etiam ista accidentia anguli in aliis prædicamentis considerantur. Neq; novū est, eandem rem in uno quidem prædicamento esse, pro varia autem consideratione etiam in diversis poni. Sic triangulum, quatenus talem habet figuram, est in prædicamento qualitatis: quatenus vero talem talemve magnitudinem habet, in prædicamento quantitatis consideratur. Ita ergo angulus quatenus ex rectis curvisve lineis componitur, est vel rectilineus vel curvilineus, adeoque in prædicamento qualitatis: quate-

nus vero, inter latera angulum comprehendentia, majus minusve spatium fuerit, est in prædicamento quantitatis, & quantitatem vere habet. Quibus consideratis omnia clara sunt ac perspicua: adeoque omnes Sexti objectiones vanæ.

Duas quidem adhuc ad finem operis sui in medium adducit, quarum tamen utraq; ex dictis facillime refutatur. Una est contra Definitionem circuli: altera contra propositionem x.lib.I Elem.Euclidis. Contra circulum ait, sublati omnibus lineis, neq; circulum quicquam esse, quod quidem contra omnes figuras cæterasque omnes definitiones valeret, siquidē ullius precii foret. Sed triumphum ante victoriam agere stultorum est. Nos demonstravimus, non tantum puncta, lineas & superficies vere in natura esse, sed etiam Sexti argumenta ne sapiente quidem homine digna. Cum ergo & lineæ omnis generis, & puncta, & superficies vere concipiantur à Geometris: certum etiam est, non tantum circulum, sed & cæteras omnes figuras concipi recte posse, earumque definitiones omnibus modis veras esse.

Illud quoque quod contra X. Propositionem lib. 1. Elem adfertur tale est, ut à quovis solvi possit, qui priora accurate perlegerit. Argumentum Sexti est. Όταν ἐν λέγωσιν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν δίχα τεμῶν ἢ τὴν ἐπὶ τῷ ἄβασκος δεδομένην λέγῃσι διχοτομῶν, ἢ τὴν ἀπὸ ταύτης χατάμετράβασιν νοσμένην. Οὔτε δὲ τὴν ἐπὶ τῷ ἄβασκος δοθεῖσαν δι-

χο-



χροταμῆν ἐρῶσιν. αὐτὴ γὰρ μῆκος καὶ πλάτος αἰσθητὸν ἔχειν  
 φαίνεται. ἡ δὲ καὶ αὐτὴς εὐθεῖα γραμμὴ μῆκος ἐστὶν ἀπλάγες.  
 ὥστε μὴ εἶσαι καὶ αὐτὴς ἡ γραμμὴ ἢ ἐπὶ τῷ ἄβακος, ἔδε διχα  
 τμηθῆσεται, ὡς γραμμὴ. Καὶ μὴν ἔδε ἡ ἀπὸ ταυτῆς κατὰ με-  
 τὰ βασιν νοσμένη. Ὑποκείδω γὰρ λόγος χάριν ἐξ ἐννέα σιγμῶν  
 συνεστῶσα ἀφ' ἑκατέρω μὲν τῶν ἀκρων τεσσάρων καὶ τεσσάρων  
 ἀριθμημένων, μιᾶς δὲ τῆς δύο τετραδὸς μεσολαβήσας σιγμῆς,  
 ἔκουν εἰ διχα τέμνεσθαι ἢ ὅλην γραμμὴν, ἢ τὴν μετὰ ξὺ ταύτης τῆς  
 πέμπτης σιγμῆς καὶ τῆς ἐτέρας τετραδὸς φέρεσθαι τὸ τεμνόν,  
 ἢ καὶ αὐτῆς τῆς πέμπτης, ὥστε καὶ αὐτὴν διχάζειν. Τὸ μὲν ἔν  
 μετὰ ξὺ τῆς πέμπτης σιγμῆς καὶ τῆς ἐτέρας τετραδὸς φέρε-  
 σθαι τὸ τεμνόν, τῶν ἀτόπων. γνησέσθαι γὰρ ἄνισα τὰ τμήματ' α,  
 καὶ τὸ μὲν ἐκ τεσσάρων σιγμῶν, τὸ δὲ ἐκ πέντε. Το δὲ αὐτὴν δι-  
 χάζειν τὴν σιγμὴν, πόλλῳ τῷ ὑπολείπῃ ἀλογώτερον. ἔκλει γὰρ  
 ἀδιάσθητον ἀπολείψας σημεῖον ὅγε διχάζεσθαι πρὸς τῷ τεμνόντι.  
*Quando ergo dicunt datam rectam in duas partes scin-*  
*dere, aut eam scindere docent quæ in abaco est, aut*  
*eam quæ per transitum hujus intelligitur. Sed eam quæ*  
*in abaco est bifariam dividi non dicunt, cum ea mani-*  
*festam habeat latitudinem. Recta autem ex eorum sen-*  
*tentia omnis est expers latitudinis. Quare cum illa quæ*  
*in abaco est, linea ex ipsorum sententia non sit, neque illa*  
*ut linea in duas partes secabitur. Verum neq. illa quæ*  
*per transitum hujus intelligitur. Ponatur enim aliqua*  
 con-

*constans ex novem punctis, quatuor quidem punctis ab utroque extremorum numeratis, uno autem puncto duos quaterniones intercipientem in medio. Ergo si in duas partes tota scinditur linea, aut inter quintum hujus punctum, & alterum quaternionem feretur id quod secat, aut in ipso quinto, ita ut eum dividat bifariam. Atque ferri quidem inter quintum punctum & alterum quaternionem id quod secat, à ratione est alienum. Tum enim segmenta forent inæqualia, unum quidem quinque punctorum, alterum vero quatuor. Ipsum autem punctum in duas secari partes est magis absurdum quam prius. Neque enim punctum amplius erit indivisibile, omnibusque carens partibus. Verum antea manifestissime demonstravimus lineam ex punctis nullo modo componi: tum quoque maximam minimamque lineam æqualia numero puncta habere, hoc est in una, tot sumi posse puncta, quot in alia. Denique si mille puncta jungantur invicem, unicum tantum punctum conficere, adeoque si eadem mille puncta ita in unum composita divellantur invicem, punctum tamen esse indivisibile. Sophisma ergo Sexti de novem punctis, ne hili quidem est, cum nulla usquam sit linea in qua infinita numero puncta sumi non possint, adeoque in illa quæ novem puncta habet, possint & mille puncta concipi. Et cum linea neutro modo ex punctis componatur, utique, nec in bisectione una pars longior sit altera, neque punctum dividatur. Illud quoque quod Sextus ait de centro circuli, quod in circuli divi-*

*visio-*



visione, bifariam dividatur, falsum plane est. Neque enim superficies ex punctis componitur, imo ne ex lineis quidem, ut antea fuit demonstratum. Ideoque non sequitur, quod, circulo seu superficie plana circulari bifariam divisa, etiam centrum seu punctum bifariam dividatur. Hæc ergo omnia falsis hypothefibus nituntur, nullamq; solidam demonstrationem continent. Atq; ita quidem ea omnia quæ à Sexto Empirico contra Geometras proponuntur accurate examinavimus & falsa vanaq; omnia esse deprehendimus. Nunc de cæteris veritatibus Geometricis porro agendum erit.

## CAP. XVII.

Haftenus quidem materiam Geometricam examinavimus, earumque rerum definitiones percurrimus, quæ à Geometris considerantur: qua quidem re id præstitimus, ut non tantum ea quæ à Sexto Empirico adversus Geometras scripta sunt, vanitatis ac falsitatis convincantur, sed & earum rerum natura, quæ in Geometricis consideratur, certo cognita sit ac demonstrata. Nam cum constet, puncta, lineas, superficies & angulos omnis generis non tantum vere existere, sed etiam id esse, quod Geometræ supponunt: utique & manifestum erit, quæ ex his componuntur triangula, quadrata, pentagona. &c. aut quæ hæc supponunt, ut parallelæ lineæ, in natura existere. Certum quidem est Euclidem totam materiam Geometricam definitionibus heic non explicasse, cum sibi

Q

suffi-

sufficere arbitraretur, si ea tantum de quibus tractare vellet, Lectori ob oculos poneret, ipsique paucis definitionibus indicaret quas res talibus verbis denotaret. Neque sane dixerim, hæc ita ab Euclide fuisse præstita, ut nihil desideretur. Nam ut alia omit-  
tam, in demonstrationibus quidem sapissime meminit linearum in directum jacentium, quarum tamen definitionem nusquam invenies. Quod si dixeris propria vocis nomenclatura id indicari: respondebo id ipsum quoque in Triangulo, pentagono, aliisque fieri; quorum tamen definitionem *ὁ γεωμετρικός* dedit. Et quam necessaria sit definitio linearum in directum jacentium, postea manifestum faciemus. Hac ergo forte in parte, aliquo modo, carpi posset Euclides, quod rerum necessariarum definitiones omisisset. Sed nulli via veritatis occlusa est; omnibus adhuc patet, semperque patebit. Multa sane Euclides præstitit, & plura quam ullus alius, quorum lucubrationes in eo scribendi genere habemus. Sed post tantam messem, aliquod dari spicilegium, quid mirum? Id sane cuius veritatis amanti sufficit, quod nihil falsi Euclides supposuerit, neque in tanta demonstrationum copia, ullum paralogismum fecerit; quod cæteri vix sunt assequuti. Fateor quidem, ipsum quoque Euclidem alicubi id supponere, quod neque tam clarum est, ut supponi aut pro concessio assumi debeat, neque ab ipso sit demonstratum. Id tamen quod supponit falsum non est. Et quamquam ab ipso demonstratum non sit, ab aliis ta-  
men



mē facili via, nulloq; labore demonstrari potest, ut postmodū docebimus. Ac tantum quidem de definitionibus I. libri Elementorum dicta sunt. Quod enim cæterorum librorum definitiones attinet, de iis sequenti libro dicendum. Hoc vero ea omnia pertexere nobis animus est, quæ contra primum Elementorum Euclidis ab ullo unquam mota fuere, vel jure moveri possunt. Et cum principio hujus scriptionis, hypotheses Geometricas in Definitiones, Postulata atque Axiomata diviserimus, atque Definitionum naturam hucusque satis accurate explicuerimus: nunc de Axiomatibus ac Postulatis agemus.

## CAP. XVIII.

Axiomata quidem, proprie & accurate loquendo, sola & præcipua esse demonstrationis Geometricæ principia, in confesso est: quæ ideo talia esse oportet, ut ab nemine sano negari possint. Et priora quidem IX. Euclidis, talia omnino esse, nemo sapiens unquā negaverit. Quis enim sana mente præditus, has veritates omnes & singulas certissimas esse non perspexerit? Τὰ τῶν αὐτῶν ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ χαλεπαίνοντα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἀνίστα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἐστὶν ἀνίστα. Καὶ τὰ τῷ αὐτῷ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ. Καὶ τὰ τῷ αὐτῷ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλ-

Q 2

ληλα

ληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὸ ὅλον τῷ μέρει μείζον ἐστί.  
*Quæ eidem æqualia, etiam inter se sunt æqualia. Et si  
 æqualibus æqualia addantur, tota fieri æqualia. Et si  
 ab æqualibus æqualia auferantur residua esse æqualia.  
 Et si inæqualibus æqualia apponantur, tota esse inæ-  
 qualia. Et si ab inæqualibus auferantur æqualia, re-  
 sidua esse inæqualia. Et ejusdem dupla inter se esse æ-  
 qualia. Et ejusdem dimidia etiam inter se esse æqualia.  
 Et quæ congruunt invicem, inter se sunt æqualia.  
 Totum majus sua parte.* Sunt enim hæc omnia natura  
 cognita, & cum divinæ auræ particula, omnibus &  
 singulis hominibus implantata. Si enim accurate o-  
 mnia & singula perscrutemur, magnoque & diligenti  
 studio humanas actiones cum brutorum animantium  
 comparemus, certo deprehendemus, nihil esse quo  
 quidem ceu certa ac infallibili nota & charactere, illæ  
 ab his distingvi possint, nisi solius veritatis & sapientiæ  
 cognitione atque amore. Primæ autem veritates, vel  
 saltem inter primas, hæc sunt, quas nunc ex Euclide pro-  
 posuimus. Scio quidem Claudium Galenum libro de  
 optimo genere docendi περὶ ἀρίστης διδασκαλίας de Car-  
 neade Academico referre ne ipsum id quidem pro ve-  
 ro habuisse quod primo loco ponimus, Nempe quæ  
 eidem æqualia etiam inter se sunt æqualia. Ὁ γὰρ Καρ-  
 νεάδης εἰδὲ τῷ τὸ πάντων ἐναργέστατον συγχωρεῖ πιστεύειν, ὅτι τὰ  
 τῶν αὐτῶν ἴσα μεγέθη, καὶ ἀλλήλοις ἴσα γίνονται. Carneades  
*itaque, neque illud quod omnium est evidentissimum concedit  
 esse credendum. Quæ eidem æquales sunt magnitudi-  
 nes*



nes etiam inter se sunt æquales. Verum ista objectio  
 ne refutatione quidem digna est. Infani enim homi-  
 nis deliria si quis confutare & falsitatis convincere  
 vellet, næis sapientioribus irrisui eslet. Compescen-  
 da quidem aliquando horuncce hominum impuden-  
 tia & audacia, quod & egregie in laudato nunc opere  
 præstitit Galenus, cujus rationes ideo nos non adfe-  
 remus, ne aliorum scrinia compilare velle videamur.  
 Neque tamen ideo cum hisce disputandum, ut veri-  
 tas demonstretur: Id enim impossibile, (Primæ enim  
 veritates nullo modo demonstrari possunt) sed tan-  
 tum, ut stultitia & dementia talium hominum omni-  
 bus ob oculos ponatur, cæterique qui insanire volunt  
 deterreantur. Hæc ergo omnia quæ recensuimus  
 Axiomata talia sunt, ut nec demonstrari possint, neq;  
 à quoquam falsitatis redargui aut convinci. Præter  
 ista vero quædam alia axiomata proponuntur quæ fa-  
 ne non eandem habent naturam. Quamvis enim vera  
 sint, tamen non ita natura cognita sunt ut priora; neq;  
 sine demonstratione vera esse deprehenduntur. Sunt  
 vero hæc. Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλοις εἰσὶ. Καὶ ἐὰν  
 εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτῃ, τὰς ἐνθὺς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέ-  
 ρη γωνίας δύο ὀρθὰν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας αἱ δύο αὐτὰ  
 εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, Συμπεσόντων ἀλλήλοις ἐφ' α' μέρη εἰσὶν αἱ τῶν  
 δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι. Καὶ δύο εὐθεῖαι χώριον ἔχοντες περιέχουσιν.  
*Omnes recti anguli inter se sunt æquales. Et si induas  
 rectas recta incidens internos & versus easdem partes*

Q 3

na-

*angulos minores fecerit duobus rectis, concurrent illæ duæ rectæ, si in infinitum educantur, versus illas partes, ubi sunt duo anguli duobus rectis minores. Et duæ rectæ lineæ spatium seu superficiem non comprehendunt. Prima enim harum vera quidem est, sed tamen sine demonstratione vera esse non intelligitur. Sane propositio XX. lib. I. Elem. Duo latera ejusdem trianguli rectilinei, majora sunt reliquo quomodocunque sumpta non minus clara est ac certa quam hæc assertio. Omnes anguli recti inter se sunt æquales. Epicurei quidem affirmabant illam quam nunc laudavimus propositionem, adeo claram esse: ut etiam asinus, qui demonstrationes Geometricas non intelligit, hoc per se perspicat, ideoque irridebant Geometras, qui tam manifesta demonstrarent. Auctor Proclus libr. III. comm. in I. Euclid. ad hanc ipsam Propositionem. Verum de Epicureis alibi videndum. Id tantum dico, cum Euclides hanc tam claram ac evidentem veritatem sine demonstratione proponere noluerit, debebat utique illa etiam demonstrasse, quæ his clariora non sunt, imo quorum veritas magis in obscuro est. Veritas autem hujus sententiæ Si in duas rectas recta incidens angulos internos ad easdem partes minores fecerit duobus rectis, tum rectas illas concurrere, si in infinitum producantur, versus illas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores, est magis intricata, imo multo obscurior, quam hæc Omnis trianguli rectilinei, duo latera, tertio majora, quomodocunque sumpta. Saltem illa*



illa assertio nullo modo inter Axiomata aut κοινὰς ἐννόμιας  
 poni debet, quod neque ab Euclide factum arbitror.  
 Proclus enim insignis & pervetustus commentator  
 Euclidis, inter postulata hæc fuisse posita subindicat,  
 præter ultimum quod pro axioma recenset. Ipsemet  
 vero partim ex aliorum mente, partim juxta propriam  
 sententiam adstruit inter postulata non debere po-  
 ni. lib. III. comment. in I. Euclid. Δῆλον, ὅτι τὸ, πᾶ-  
 σας ὀρθὰς εἶναι ἴσας τὰς γωνίας, ἔκ ἐστιν ἀίτημα, ἔδε τὸ περὶ πᾶν,  
 τὸ εἶναι εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπέπτυσσα τὰς ἐν ᾗ καὶ ἐπὶ τὰ  
 εὐθὺ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς εὐ-  
 θείας (ἐμπέπτειν ἐφ' αὐτὰ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι).  
 Κατὰ δὲ τὸ δεύτερον ἔκ ἐστιν ἀξίωμα το, δύο εὐθείας χωρίον μὴ  
 περιέχειν ὃ καὶ νῦν πινεσ ὡς Αξίωμα προσγράψουσι. *Manife-  
 stum est, quod hoc, Omnes anguli recti inter se sunt æ-  
 quales, Postulatum nequaquam sit: sicut neque quintum  
 postulatum, si in duas rectas recta incidens, internos &  
 ad easdem partes angulos minores fecerit duobus rectis,  
 tum lineas istas eductas concurrere versus eas partes,  
 ubi sunt anguli duobus rectis minores. Juxta secundam  
 verorationem non erit axioma, Duæ rectæ lineæ spa-  
 tium non comprehendunt, quod etiam nunc quidam in-  
 ter axiomata recensent.* Ex quibus liquet, tres hæc  
 assertiones seu enunciationes inter Axiomata ab Eu-  
 clide positas non fuisse, sed primam quidem & secun-  
 dam inter Postulata, fuisseque hanc, postulatum quin-  
 tum,

tum, ultimam vero à quibusdam, tantum inter axiomata relatam. Videtur autem Theo Alexandrinus, vel saltem ejus domestici, familiares aut discipuli, hæc omnia inter *Κανὼς ἐννόιας* posuisse & pro axiomatibus habuisse. Græcus enim Textus Euclidis [quem hodie legimus, est ἐκ τῶν Θεωνος ὑποστίλων. *Ex editione familiarium Theonis*, ut in ipsius operis titulo cernitur. Quicquid sit, certum quidem est inter Axiomata hæc non posse collocari, cum axiomata debeant esse *ἀποτιτὰ* & *ἀναποδείκτα*, *per se credibilia & non demonstrabilia*: qualia quidem hæc nostra non sunt. An vero inter Postulata poni debeant sequenti capite dispiciemus.

## CAP. XIX.

Qui veritates rerum investigare volunt id accurate observabunt, ne vel in manifestis veritatibus demonstrationes quærant, vel non manifestas & claras sine demonstrationibus admittant. Utroque enim modo certitudo atque evidentia tollitur, priori quidem, quod, ad certissimarum rerum demonstrationem, minus certa supponere cogamur: posteriori vero, quod ex incertis certa demonstrari nequeant. Virtus autem in medio consistit, quæ neque in infinitum demonstrationes quærit, neque necessarias negligit. Peccarunt vero in his duo insignes Mathematici Apollonius quidem in excessu, Euclides vero in defectu. Is enim dū certissima axiomata, demonstrare conatur, & quæ ipsum naturæ lumen vera esse docet: alia supponere

CO-



cogitur, minus clara certaue. Euclides autem dum alia non minus clara, imo ejusdem plane generis demonstrat, quædam vero supponit ut axiomata, increpationem & censuram aliorum non effugit. Verba Procli sunt comm III. in I. Elem Euclidis. Μάτην ἔν τῶν Αξιωμάτων Ἀπολλώνιος ἐπεχείρησεν ἀποδείξεις ἀποδιδόναι. Ὄρθως γὰρ καὶ ὁ Γεμῖνος ἐπέτησεν ὅτι οἱ μὲν τῶν ἀναποδείκτων ἀποδείξεις ἐπενόησαν, καὶ ἀπὸ ἀγνοσέρων μέσων τὰ γνώριμα πᾶσι χεῖρα σκευάζειν ἐπεχείρησαν. Ὅ δὲ πέπονθεν ὁ Ἀπολλώνιος δεικνύοναι βεβλόμενος, ὅτι ἀληθές το ἀξιῶμα τὸ λεγόν· τὰ τῶν αὐτῶν ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. Οἱ δὲ καὶ τὰ ἀποδείξεως δεόμενα ἐν τοῖς ἀναποδείκτοις προσειλήφασιν, ὡς αὐτὸς Εὐκλείδης τὸ τε πέμπτον αἴτημα καὶ τὸ τέταρτον. Καὶ γὰρ τῶν πέντε ὡς ἀμφίβολον, ἀποδείξεως δεόμενα φασί. Καὶ πῶς γὰρ ἔ γελοῖον, ὦν τὰ ἀντίτροφα θεωρήματα ἐστὶν ἀπόδεικτα, ταῦτα ὡς ἀναπόδεικτα προστάττειν. Ὅτι γὰρ τῶν Συμπεπυσσῶν εὐθειῶν αἱ ἐντὸς (perperam in edito legitur ἐκτὸς) ἐλάττους εἰσι δυοῖν ὀρθοῖν, αὐτὸς ὁ Εὐκλείδης δεικνυσὶν ἐν ἐκείνῳ θεωρήματι. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶ πάντῃ μετὰ λαμβανόμεναι. Ἀλλὰ καὶ ὅτι ἔ πάντως ἡ τῇ ὀρθῇ ἴση ὀρθὴ ἐστίν, δεικνύται σαφῶς. Οὐκ ἀρα ἀναπόδεικτα τούτοις ἀντιτρέφοντα Συγχωρήειον Φησὶν ὁ Γεμῖνος. Ἔοικεν ἔν, καὶ τὴν τέττα διατάξιν, πρία μὲν εἰναι αἰτήματα, τὰ λοιπὰ δύο δεῖσθαι τῆς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης, αὐ-

R

τά

τὰ τε καὶ τὰ ἀντιτρέφοντα ἀντίοις. Ἐν δὲ τοῖς ἀξιώμασι, τὸ δὲ ἐν-  
 θέας χωρίον μὴ περιέχειν, προσχέουται περίττως· εἴπερ δι' ἀπο-  
 δείξεως ἔχει τὸ πῶς. *Frustra ergo demonstrationem Axiomatum molitus est Apollonius. Vere enim Geminus ait, eos qui indemonstrabilia demonstrare sunt conati, ex incertis & incognitis, omnium clarissima & maxime cognita probare voluisse. Quod & ipsi Apollonio evenit, dum id demonstrare vult quod dicitur. Quæ eidem æqualia, etiam inter se sunt æqualia. Quidam vero & ea quæ demonstrari debent, ut indemonstrabilia supposuerunt, inter quos Euclides, qui hoc modo quartum & quintum Postulatum supposuit. Utrumque enim ut dubium demonstratione quidam indigere affirmarunt. Et nonne ridiculum est, hæc ut indemonstrabilia supponere? cum inversa horum theorematum demonstrantur. Nam quod duo interni anguli linearum concurrentium minores sint duobus rectis, ipsemet Euclides demonstravit hoc Theoremate. Omnis trianguli duo anguli minores sunt duobus rectis, quomodocunque sumpti. Verum quod neq. semper omnis angulus æqualis recto, sit rectus, clare demonstratur. Non ergo ea quæ cum his theorematibus convertuntur, sine demonstratione assumere licet, ait Geminus. Solent ergo quidem juxta hanc rationem tria tantum esse postulata. Duo vero reliqua demonstratione indigent, non minus quam conversa illorum theoremata. Inter Axiomata vero superfluum hoc est, Duæ rectæ spatium non comprehendunt, quandoquidem*



*dem veritas hujus ex demonstratione pendeat. Et sane utrumque tam Apolloniū quam Euclidem hac in parte peccasse manifestum. Quod enim Geminus ait Apolloniū, ex incognitis ac minus certis certa probare voluisse, res ipsa declarat. Axioma enim hoc, Quæ eidem æqualia etiam inter se sunt æqualia, tali quidem modo probare voluit, ut est apud Proclum lib. III. comment. in I. Euclid. Verba Procli integra adscribam ut & sententia Apollonii, & quid de ea sit statuendum una discatur. Οἱ δὲ καὶ ἡ ἀπόδειξις ἢ Ἀπολλώνιος εὐρηκέναι πέπεισται τῷ πρώτῳ τῶν Αἰωμάτων ὃ δὲν μᾶλλον ἔχει τὸ μέσον τῷ συμπέρασματι γνωριμότερον, εἰ μὴ καὶ πλεον ἁμφοσθητέμενον, μάθους ἀν' ἐπιβλέψας εἰς αὐτὴν καὶ σμικρόν. Ἐστὼ γὰρ Φησὶ τὸ Α τῷ Β ἴσον, τῷ δὲ τῷ Γ. λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Γ ἴσον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α. τῷ Β. ἴσον, τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον, καὶ τὸ ἄρα Α. τῷ Γ. τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. Ἰσα ἄρα ἐστίν. Ἐν δὲ τούτοις δύο προβλεῖν ἀναγκαῖον. Ἐν μὲν ὅτι τὰ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον ἀλλήλοις ἴσα ἐστίν, ἕτερον δὲ ὅτι τα τῷ αὐτῷ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον καὶ ἀλλήλοις τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. Ταῦτα δὲ ὅτι πολλὰ ἀσαφέστερα τῷ προβέντι Αἰωμάτι ἐναργές. Quod autem demonstrationem primi Axiomatis attinet, quam Apollonius se invenisse credit, medius in ea terminus non tantum ipsa conclusione magis cognitus non est, verum majore etiam difficultate premitur, ut cuiusvis, qui eam parumper examinare voluerit, facile patebit. Ita*

R 2

enim

enim ait. Sit *A.* quantum, æquale quanto *B.* Hoc vero sit æquale quanto *G.* dico quod *A.* ipsi *G.* sit æquale. Quoniam enim *A.* & *B.* invicem sunt æqualia, ergo æqualem locum occupabunt. *A.* ergo & *G.* etiam æqualem locum occupabunt, & per consequens inter se erunt æqualia. In his autem necessarium est duo supponere, unum, quæ æqualia loca occupant inter se esse æqualia. Alterum, quod quæ eidem eundem locum occupant, & inter se eundem occupent locum. Quod autem hæc multo sint obscuriora quam præsens Axioma, cuius manifestum. Ex quibus liquet male Apollonium demonstrationem Axiomatis in medium adduxisse, ideoque Axiomata in Geometricis demonstrari non posse, sed esse ἀναπόδεικτα. Quod autem de Axiomatibus verum est, id certa quadam ratione ipsis quoque postularis convenit. Quæ enim methodo recta linea Geometrica, vel accuratissima quæcunque alia, a puncto ad punctum duci possit, in Geometricis demonstrari nequit. Imo si subtiliter res gerenda, ne circulus quidem Geometricus describi potest, modusve in Geometria proponi, quo id fiat. Quis enim ulla arte lineam circularem descripserit, omni carentem latitudine. Et si quidem id fieri posset, quo modo planum illud nancisceretur, in quo talis circulus esset describendus. Unde neque recta terminata ita produci Geometrice potest, cum planum, in quo ducenda est, non habeatur. Vix enim tales rectas taliave plana acquirere possumus, quæ omni sensibili vitio careant: quanto minus tale habebi-



bebimus, in quo intellectus nihil desideret. Ponit ergo Geometra hæc omnia ita in rerum natura dari: modum vero quo dentur, aut dari possint, non demonstrat. Non ergo Postulata possunt demonstrari, sed ea supponere cogimur. Ea autem quæ Geometra de lineis circulisve demonstrat, principaliter quidem ac proprie vera sunt de linea & circulo Geometrico: sensibilibiter autem vera etiam de lineis sensibilibus, aliisque planis ac superficiebus sensibilibus, deprehenduntur. Quoniam vero Axiomata & Postulata non demonstrantur, neque demonstrari possunt; sequitur duas hæc Propositiones Omnes recti anguli inter se sunt æquales, & Si in duas rectas recta incidens, duos angulos internos ad easdem partes minores fecerit duobus rectis, tunc lineas versus illas partes concurrere &c. vere nec Axiomata esse, nec Postulata, cum ambæ accurate demonstrari, & possint, & debeant. Quod enim omnino debeant demonstrari, inde liquet; quod conversa horum ab ipso Euclide demonstrantur: & quod præcipuum est, hæc natura sua adeo clara non sint, ut sine demonstratione pro certis admitti debeant. Conversum enim quinti Postulati est Propositio XVII. libr. I. Cujusvis trianguli duo anguli minores sunt duobus rectis, quomodocunque sumpti, seu quod idem est, si in rectas lineas concurrentes recta incidat, angulos internos facit duobus rectis minores. Quoniam ergo hoc demonstratur de angulis, ergo id ipsum de concurrentia laterum etiam demonstrari debet.

R 3

Et

Et sane, cuivis res æquius examinanti, liquet, hoc Postulatum per se cognitum non esse. Neque illud de angulis rectis tam clarum est, ut sine omni alia cognitione intelligi possit. Quomodo autem hæc duo demonstrantur, sequenti capite proponemus.

## CAP. XX.

Quod ergo illam Propositionem attinet *Omnes anguli recti inter se sunt æquales* Proclus quidem hoc modo eam demonstravit libro. III. comment in I. Euclid: in hunc ipsum locum. Ἐτάσαν δύο ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ  $AB\Gamma$  καὶ ὑπὸ  $\Delta EZ$ , λέγω δὴ ὅτι ἴσαι εἰσὶν. Εἰ γὰρ μὴ ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἢ ἑσὶν ὡς τὸ  $B$ . Ἐφαρμοζομένης ἄρα τῆς  $\Delta E$  ἐπὶ τῆς  $AB$ , ἡ  $EZ$  ἐν ὅς πεσεῖται. Πιπτέτω ὡς ἡ  $BH$ . καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ  $B\Gamma$ . ἐπὶ τὸ  $\Theta$ . Ἐπεὶ δὲ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ  $AB\Theta$ , καὶ ἴσαι ἀλλήλοις. ἔχομεν γὰρ ἐν τοῖς ὅροις, ὅτι ἡ ὀρθὴ γωνία ἴση τῇ ἰφεξῆς. Ἡ ἄρα ὑπὸ  $AB\Theta$  μείζων τῆς ὑπὸ  $ABH$ . Πάλιν ἐκβεβλήσθω ἡ  $BH$  ἐπὶ τὸ  $K$ . Ἐπεὶ δὲ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ  $ABH$ . καὶ ἡ ἰφεξῆς ὀρθὴ, διὰ ταύτας καὶ ἴση τῇ ὑπὸ  $ABH$ . ὥστε ἡ ὑπὸ  $AB\Theta$  ἐλάσσων τῆς ὑπὸ  $ABH$ . Ἀλλὰ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὴ μείζων ὀρθῆς. *Sint (in schemate XI.) duo recti anguli comprehensi*  $AB\Gamma$  καὶ  $\Delta EZ$ : *dico quod inter se sint æquales. Si enim id verum non est, utique alter horum major erit* Adaptetur  $\Delta E$  ipsi  $AB$ . Cadet ergo  $EZ$  intra  $B\Gamma$ . Cadat vero ut  $BH$ , καὶ producat  $B\Gamma$  in  $\Theta$ . *Quoniam ergo angulus sub*  $AB\Theta$  *est rectus, erunt bini an-*



anguli æquales invicem. Etenim in definitionibus habemus, quod rectus angulus sit æqualis illi qui deinceps est angulo. Angulus ergo  $AB\odot$  major est angulo  $ABH$ . Rursum educatur  $BH$  in  $K$ . Quoniam ergo angulus  $ABH$  est rectus, & qui deinceps est, etiam rectus, ideoq; æqualis ipsi  $ABH$ : erit utique angulus  $AB\odot$  minor angulo  $ABH$ . Sed & major est. quod est absurdum. Non ergo rectus angulus major est recto. Quoniam vero demonstratio non tam facile sine schemate intelligi potest, nos una cum Latina interpretatione schema adjecimus. Heic vero paucis demonstrationē explicabimus. Argumentatur auctor reducendo adversarium ad absurdū, qui modus argumentandi satis frequensest in disciplinis. Vel enim angulus alteri angulo æqualis erit, vel major, vel minor. Si æqualis est, lis est composita. Si vero adversarius hoc negaverit, utiq; vel major erit altero angulo, vel minor. Dicat nunc adversarius  $ABr$  in dato schemate majorem esse  $\triangle EZ$ . Si ergo recta  $\triangle EZ$  inponatur ipsi  $ABr$ , ita ut  $\triangle E$  congruat cum  $AB$ . tum  $EZ$  non congruet cum  $Br$ . Si enim congrueret, utique anguli æquales forent per Axioma VIII. adeoque hinc falsitatem suæ sententiæ videret adversarius. Quod si ergo non congruunt: utique, cum  $AB\Gamma$  sit major quam  $\triangle EZ$ , ergo  $EZ$  cadet intra  $AB$  &  $B\Gamma$ . Cadat v. g. in  $BH$ . Producaturo vero recta  $B\Gamma$  in  $\odot$ . Definitio autem recti anguli hæc est, si recta super rectam consistens angulos utrinque æquales fecerit, tum ambos illos angulos esse rectos. Cum ergo  $AB$  recta  
fu-

super rectam  $Br$  consistens, ab una parte rectum faciat angulum  $ABr$ : & ab altera, rectum huic æqualem faciet. Erit ergo  $AB\theta$  æqualis  $ABr$  & per consequens major quam  $ABH$ , hoc est quam  $\Delta EZ$ . Verum si recta  $HB$  producat in  $K$ : erit etiam, ex hypothese adversarii angulus  $ABK$  rectus & æqualis angulo  $ABH$ . Angulus enim  $ABH$  ex hypothese adversarii est angulus  $\Delta EZ$  hoc est rectus. In rectam autem lineam  $HK$ , insistens recta  $AB$ , cum ab una parte rectum angulum faciat, etiam ab altera parte rectum faciet angulum: adeoque  $KBA$  æqualem  $ABH$ . Est vero  $KBA$  angulus major  $AB\theta$  angulo. ergo &  $ABH$  major erit  $AB\theta$  angulo. Antea vero conclusum fuit, ex hac eadem adversarii hypothese,  $ABH$  minorem esse angulo  $AB\theta$ . Idem ergo angulus, eodem angulo, & major est, & minor. At falsum consequens, ergo & antecedens. Adeoque rectus angulus nec major est altero quocunque recto angulo, nec minor: ideoque æqualis.

Potest autem hoc ipsum alia breviori atque expeditiori methodo demonstrari. Cum enim ex definitionibus constat, obtusum & acutum angulum à recto differre, cum quidem, quod recto major sit, hunc vero quod recto sit minor; itaq; in hoc eodem diagrammate, si dicatur  $ABr$  rectus, major esse recto  $\Delta EZ$ , dematur ergo aliquid angulo  $ABr$ , ut residuum æquale fiat angulo  $\Delta EZ$ . Quantumcunque vero illud fuerit quod auferatur, semper angulus residuus minor erit angulo  $ABr$ . ut v. g. si auferatur  $HBr$  ab angulo,



Io AB $\Gamma$ , residuus angulus ABH minor erit angulo AB $\Gamma$ . Est vero AB $\Gamma$  rectus. Qui autem recto minor est, acutus est, non vero rectus. Si ergo  $\Delta$ EZ minor fuerit AB $\Gamma$ , utique non rectus erit, sed acutus. Eodem modo si  $\Delta$ EZ dicatur major esse AB $\Gamma$ , seu quod idem est, AB $\Theta$ : addatur aliquid. Quantumcunque vero illud fuerit, quod adjicitur, semper majorem angulum faciet recto AB $\Theta$ . seu AB $\Gamma$ . Ut si  $\Theta$ BK addatur AB $\Theta$ , erit angulus ABK major angulo AB $\Theta$ . At angulus AB $\Theta$  est rectus. Qui autem recto major est angulus, non rectus est, sed obtusus. Ergo angulus ABK non est rectus, sed obtusus. Et si  $\Delta$ EZ convenit angulo ABK, utique non rectus erit, sed obtusus. Rectus ergo angulus, non potest esse vel major, vel minor, altero recto. Si enim major fuerit, non rectus erit, sed obtusus. Si minor: non rectus est, sed acutus. Adeoque omnes anguli recti inter se erunt æquales.

Quod autem demonstratum est de rectis angulis, eos omnes inter se esse æquales, id de converso hujus Propositionis non valet, nempe omnes angulos æquales, esse rectos. In certo quidem casu verum est, nempe si recta rectam ita secuerit, ut omnes anguli sint æquales, tum verum est hosce angulos esse rectos. Adeoque verum etiam est, si anguli, vel duo, ad easdem partes, vel quatuor, ad omnes partes, ex duarum rectarum linearum inclinatione procreati, æquales fuerint: tum semper esse rectos. Nec posse duas rectas lineas quæ inclinando se invicem contin-

S

gunt,

gunt, æquales angulos, singulos, singulis, efficere, nisi anguli illi sint recti. Non tamen omnes propterea anguli æquales, sunt recti. Quando enim linea lineam secat, qui ad verticem sunt anguli, semper invicem sunt æquales, & tamen, & acuti esse possunt, & obtusi, ut ex XV. Propositione I. Elem. liquet.

Quod vero Pappus & ex eo Proclus demonstrare conantur, esse quosdam angulos rectis æquales, nec tamen rectos, id non video quomodo ex appolita eorum demonstratione sequatur. Verba Procli sunt.

Ὁ δὲ Πάππος ἐπέστησεν ἡμᾶς ὀρθῶς, ὅτι τὸ ἀντίστροφον οὐκέτι ἀληθές τὸ τὴν ἴσιν τῇ ὀρθῇ γωνία ἐκ παντὸς εἶναι ὀρθὴν. Ἀλλ' εἰ μὲν εὐθύγραμμος εἴη πάντως ὀρθὴν εἶναι. δύνασθαι δὲ καὶ περιφερὸς γραμμοὶ γωνίας ἴσιν ὀρθῇ δειχθῆναι. Καὶ δῆλον ὡς ἐκέλευε τὴν ἱστίαν τὴν ὀρθὴν εἶναι δύνασθαι προσαγορεύεσθαι. Κατὰ γὰρ τὴν τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν τομὴν, τὴν ὀρθὴν ἐλαμβάνομεν, ὑφιστάμεν αὐτὴν ὑπὸ εὐθείας ὑφεστάσης ἀκλινῶς πρὸς τὴν ὑποκειμένην, ὥστε ἢ ἴσιν τῇ ὀρθῇ ἢ πάντως (ἴσιν τῇ ὀρθῇ) legendum ὀρθὴ ἐστίν, εἴπερ μὴδ' εὐθύγραμμος. Νενοήθωσαν ἡδε εὐθείαν δύο ἴσαι αἱ AB. BG. ποιεῖσθαι τὴν πρὸς τῇ B ὀρθὴν. Κατέσταναι ἴσαι, καὶ ἐπ' αὐτὰν ἡμικυκλίας κέντρῳ καὶ διαστήματι γράφοντα τὰ AEB. BZΓ. Ἐπεὶ ὄντισα τὰ ἡμικυκλίας, ἐφαρμόζει ἀλλήλαις, καὶ ἴσιν ἡ ὑπὸ EBA γωνία τῇ ὑπὸ ZBΓ. Κοινὴ προσκείσθω, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ABZ. Ὅλη ἄρα ἡ ὀρθὴ ἴση ἐστὶ τῇ μνησθεῖ τῇ ὑπὸ EBZ. Καὶ ὁμῶς



ὁμῶς ἔκ ἐστιν ἡ μηννοειδὴς ὀρθή. τῷ δὲ αὐτῷ τρέπον καὶ ἀμβλείας  
 ἔσης ἢ ὀξείας τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. δειχθήσεαι αὐτῇ ἴση μηννοειδὴς. Τῷ  
 γὰρ ἐστὶ τὸ εἶδος πᾶν περιφερογράμμων γωνιῶν τὸ Συμ-  
 βαζόμενον τοῖς ἐνθυγράμμοις. Πλὴν τότε τοσοῦτον ἴσμεν, ἐπὶ μὲν  
 τῆς ὀρθῆς καὶ τῆς ἀμβλείας προαδεῖναι δεῖ τὴν μετὰ τὴν γωνίαν  
 τῆς ΑΒ ἐνθείας καὶ ΒΖ περιφερείας. Ἐπὶ δὲ τῆς ὀξείας ἀφε-  
 λῆν. Ἡ γὰρ ΑΒ. ἐνθεῖα τέμνει τὴν ΒΖ περιφερῆαν. *Pappus*  
*vero recte docuit quod conversum hujus verum non sit.*  
*Nempe angulum recto æqualem, etiam semper esse re-*  
*ctum. Sed si quidem rectilineus fuerit, omnino rectū esse.*  
*Posse autem & angulum peripheriis circuli comprehen-*  
*sum demonstrari æqualem angulo recto. Et tamen cla-*  
*rum est, hunc rectum dici non posse. In divisione quidem*  
*rectilineorum angulorum, rectum eum esse diximus qui*  
*fit quando recta linea alteri rectæ supponitur, quæ qui-*  
*dem priori rectæ sine omni inclinatione insistit. Adeoque*  
*qui recto est æqualis, non semper rectus est, nisi etiam*  
*fuerit rectilineus. Concipiantur vero duæ rectæ lineæ*  
*ΑΒ. ΒΓ. comprehendentes rectum angulum ad Β. sint*  
*lineæ hæ æquales. Super ipsis autem, centris & inter-*  
*vallis convenientibus, describantur duo semicirculi*  
*ΑΕΒ & ΒΖΓ. Quoniam igitur semicirculi conveniunt*  
*invicem, ergo & angulus ΕΒΑ æqualis erit angulo*  
*ΖΒΓ. Apponatur communis & residuus, ΑΒΖ. Totus*  
*ergo rectus angulus æqualis angulo Lunæformi, qui*  
*comprehenditur sub ΕΒΖ. Et tamen angulus hic Lu-*

*naeformis non est rectus. Eodem modo si angulus  $AB\Gamma$  ponatur vel obtusus, vel acutus, demonstratur angulus Lunaeformis huic esse aequalis. Hec enim species angulorum peripheriis comprehensorum, confertur cum rectilineis. Id vero praeterea sciendum est, quod cum angulus  $AB\Gamma$ , rectus fuerit, aut obtusus: tum angulum comprehensum recta  $AB$  & Peripheria  $BZ$  debere apponi; quando vero acutus fuerit, aufertur angulus praedictus. Recta enim  $AB$  secat tum Peripheriam  $BZ$ . Verum in hoc quidem argumento plus videtur esse in conclusione, quam fuit in praemissis. Sit enim diagramma juxta rationem Pappi vel Procli exstructum n. XII. Atque in eo sit angulus  $BZr$ . rectus, latera autem  $AB$  &  $Br$  aequalia: super his autem exstructi semicirculi  $AEB$   $BZr$ , manifestum quidem est: angulos  $ABE$  &  $\Gamma EZ$  esse aequales. Quod vero angulus  $ABZ$  reliquus, junctus communi  $EBZ$ , sit aequalis recto  $ABr$ , vel solus,  $ZBE$  Lunaeformis, aequalis sit recto  $ABG$ : id vero minime liquet. Contrarium potius hinc sequitur. Angulus enim  $ABr$  excedit angulum Lunaeformem binis angulis mistis  $ABZ$  nempe, &  $\Gamma BE$ ; ideoque si angulus  $AB\Gamma$  debet aequari angulo  $ZBE$ , debent prius hi duo anguli auferri. Angulus ergo Lunaeformis seu ex duobus circuli peripheriis compositus, est minor angulo recto, & non aequalis. Quod autem diagramma hoc modo ordinari debeat, ex sequentibus liquet. Ait enim si angulus  $AB\Gamma$  ponatur acutus, tum rectam  $AB$  secare peripheriam: in obtuso autem, vel recto, non i-  
tem*



tem, ideoque angulum comprehensum AB recta & BZ peripheria heic addi debere, illic vero auferri. Quod quidem in hoc diagrammate contingere videmus. In acuto enim angulo LBK, recta KB secat peripheriam BMI. In angulo autem recto AEG, aut obtuso HBN, id non contingit. Sed tamen veritas rei nihilo propter hoc clarior. Suspicebam mendum heic latere, vel aliquid deesse. Verum quocunque modo locus vel emendetur, vel restituatur, vix quicquam proficere possumus, cum ipsa assertio perquam sit dubia. Id enim certum est, angulum peripheriarum, a rectilineo comprehensum, multo minorem esse ipso rectilineo. Quicquid sit, de eo nunc multis inquirere animus nobis non est, cum certum sit, Definitionem Geometricam esse certissimam, quæ omnes angulos rectilineos, non rectos, vel minores facit rectis, vel majores.

## CAP. XXI.

Alterum postulatam majori videtur indigere demonstratione, ideoque à Ptolemæo sicut aliud quoddam Theorema diducte fuit demonstratum. Liquet hoc ex Proclo qui Ptolemæi Propositionem modumque demonstrandi totidem verbis recenset, quæ eo libentius heic adponam, quod ipsius Ptolemæi scriptum hac de re nusquam reperitur. Ita vero Proclus libro IV. in I Elem. Euclidis. in Proposit. XXIX.

Ἡδη μὲν ἐν καὶ ἄλλοι πινὲς ὡς θεώρημα τῷ τῷ στοιχειωτῇ ληφ-

S 3

θὲν

θὲν ἀποδείξεσθαι ἠξίωσαν. Δοκεῖ δὲ καὶ ὁ Πτολεμαῖος αὐτὸ δεικνύ-  
 ναί ἐν τῷ περὶ τῶν τὰς ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένων  
 Συμπιπίειν. καὶ δείκνυσιν πόλλα πορολαβῶν τῶν μεχρὶ τῶδε τῶ  
 θεωρήματος ὑπὸ τῶν φοιχειωτῶν ποροαποδεδειγμένων. Καὶ ὑπο-  
 κείδω πάντα εἶναι ἀληθῆ ἵνα μὴ καὶ ὑμεῖς ὅχλον ἐπεισάγωμεν  
 ἄλλον, καὶ ὡς ληυμάδιον τῶν δεικνυσθαι διὰ τῶν ποροειρημένων.  
 Εἰν δὲ καὶ τῶν ποροδεδειγμένων, τὸ τὰς ἀπὸ δυοῖν ὀρθαῖς ἰσῶν  
 ἐκβαλλομένας μηδαμῶς Συμπιπίειν. λέγω τοίνυν ὅτι καὶ τὸ ἀνά-  
 παλιν ἀληθές, καὶ τὸ, πῶς ἀλλήλων ἴσων τῶν εὐθείων καὶ τεμνο-  
 μένων ὑπὸ μιᾶς εὐθείας τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας  
 δύο ὀρθοῖς ἴσα εἶναι. Ἀναγκὴ γὰρ τὴν τέμνουσαν τὰς παραλλή-  
 λους ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γω-  
 νίας, ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. Ἔτρωσαν ἔν πῶς ἀλλήλοι, αἰ αβ. γδ.  
 καὶ ἐμπιπίτω εἰς αὐτὰς ἡ εζ. λέγω ὅτι ὅτι ποιεῖ δύο ὀρθῶν μείζους  
 τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ. Εἰ γὰρ αἰ ὑπὸ αζ. γηζ. δύο ὀρθῶν  
 μείζους, αἰ λοιπαὶ αἰ ὑπὸ βζηδζ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. Ἀλλὰ καὶ  
 δύο ὀρθῶν μείζους αἰ αὐταί. Οὐδὲν γὰρ μάλλον αἰ αζ, γη παράλ-  
 ληλοι, ἢ αἰ γδ. ζβ. ὥστε εἰ ἡ ἐμπροσθα εἰς τὰς αζ γη δύο ὀρθῶν  
 μείζους ποιεῖ τὰς ἐντὸς, καὶ ἡ εἰς τὰς ζβ. γδ ἐμπιπίσσει δύο ὀρθῶν  
 ποιήσει μείζους τὰς ἐντὸς. Ἀλλ' αἰ αὐταὶ καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους.  
 Αἱ γὰρ τέσσαρες αἰ ὑπὸ αζ. γηζ. βζη. δζ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴ-  
 σαι, ὅπερ ἀδύνατον. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι εἰς τὰς παραλλή-  
 λους



λας ἐμπέπτεσαι & ποιῇ δύο ὀρθῶν ἐλάσσας τὰς ἐνὸς καὶ ἐπὶ τὰ  
 αὐτὰ μέρη γωνίας. Εἰ δὲ μήτε μείζας, μήτε ἐλάσσας ποιῇ τῶν  
 δύο ὀρθῶν, λείπεται, τὴν ἐμπέπτεσαν δύο ὀρθαῖς, ἴσας ποιῇ τὰς  
 ἐνὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας. Τότε δὲ προδεδειγμένον τὸ  
 πορεῖται ἀναμφισβήτητος ἀποδείκνυται. Λέγω γὰρ ὅτι ἐάν τις  
 δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπέπτεσαι τὰς ἐνὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γω-  
 νίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, Συμπεσύνται αἱ εὐθεῖαι ἐκβαλ-  
 λόμεναι ἐφ' αὐτὰ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. Μὴ γὰρ  
 συμπίπτωσαν, ἀλλ' εἰ ἀσύμπτωτοι εἰσὶν ἐφ' αὐτὰ μέρη αἱ τῶν δύο  
 ὀρθῶν ἐλάσσονες, πόλλω μᾶλλον ἔσονται ἀσύμπτωτοι ἐπὶ θάτε-  
 ρα, ἐφ' αὐτῶν δύο εἰσὶν ὀρθῶν αἱ μείζονες, ὥστε ἐφ' ἑκάτερα αὐτῶν  
 ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι, εἰς τὴν παράλληλοι εἰσὶν. Ἀλλὰ δέδεικται  
 ὅτι ἢ εἰς τὰς παραλλήλους ἐμπέπτεσαι, τὰς ἐνὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ  
 μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει γωνίας. Αἱ αὐταὶ ἄρα καὶ δύο ὀρθαῖς  
 ἴσαι, καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀδύνατον. Quæ ita verto  
 & ut rectius intelligatur diagramma XII. considerari  
 jubeo. Jam vero & illud quod Euclides assumpsit, alii  
 quidam ut theorema demonstrare sunt conati; atque in-  
 ter hos Ptolemæus in libro, quo probavit rectas, a mi-  
 noribus angulis, quam duo recti, productas concurrere.  
 Hoc vero demonstrat, multis antea suppositis, quæ Eu-  
 clides demonstravit, quorum fidem neque nos elevare  
 volumus, ne turbas excitemus, sed permittemus hoc ut  
 Lemma aliquod ex præcedentibus probari. Unum vero  
 in-

inter hæc demonstrata, est, Rectas, quæ à binis angulis, æqualibus totidem rectis, educuntur nusquam concurrere. Cujus conversum & verum esse dico, nempe si recta secuerit duas parallelas tum internos angulos, ad easdem partes, duobus rectis esse æquales. Necessarium enim est eam quæ parallelas secat, angulos internos & ad easdem partes, vel minores facere duobus rectis, (vel majores) vel æquales. Sint parallelæ lineæ  $\alpha\beta$   $\gamma\delta$ . incidat vero in has  $\epsilon\zeta$ . dico quod non faciat internos angulos majores duobus rectis. Si enim  $\alpha\zeta$   $\gamma\zeta$  duobus rectis sunt majores, reliqui anguli nempe  $\beta\epsilon\zeta$  &  $\delta\eta\zeta$  duobus rectis erunt minores. Sed iidem & duobus rectis sunt majores. Non enim  $\alpha\zeta$   $\gamma\zeta$  magis sunt parallelæ quam  $\epsilon\delta$   $\epsilon\beta$ . ut propterea si illa quæ in  $\alpha\zeta$   $\gamma\zeta$  incidit rectas, binos internos & ad eadem partes angulos faciat duobus rectis majores: etiam illa quæ in  $\epsilon\beta$   $\epsilon\delta$  incidit, internos & ad easdem partes angulos, duobus rectis majores faciet. Sunt vero iidem anguli & duobus rectis minores. Quatuor enim anguli  $\alpha\zeta$   $\gamma\zeta$   $\beta\epsilon\zeta$   $\delta\eta\zeta$  quatuor rectis æquales. Est vero hoc absurdum. Eodẽ modo demonstrabimus quod quæ in duas rectas incidat, internos & ad easdem partes angulos non faciat, duobus rectis minores. Si vero neque majores sunt, neque minores duobus rectis, sequitur utique eam quæ duabus rectis incidit internos & ad easdem partes angulos efficere duobus rectis æquales. Hoc vero demonstrato sine omni controversia verũ id esse deprehenditur, quod nunc præmanibus habemus. Dico enim si in duas rectas recta inci-



incidens internos & ad easdem partes angulos minores fecerit duobus rectis, concurrent rectæ illæ eductæ versus eas partes ubi sunt duo anguli duobus rectis minores. Si enim versus eas partes non concurrunt, ubi sunt anguli duobus rectis minores, multo minus concurrent versus alteram partem, ubi sunt bini anguli binis rectis majores, ita ut versus neutram partem concurrant, ideoque sint parallelæ. Sed demonstratum est, eam quæ in parallelas incidit, internos & ad easdem partes angulos, æquales facere duobus rectis. Iidem ergo anguli & binis rectis æquales sunt, & duobus rectis minores: quod est impossibile. Hactenus quidem Ptolemæus demonstravit, si in rectas lineas recta incidens angulos fecerit duobus rectis minores, tum rectas illas concurrere. Id vero fieri versus illas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores, postea hoc modo probat.

Ἐ'γωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἰαβ γδ. καὶ ἐμπίπτουσαι εἰς αὐτὰς ἡ ἐξ ηθ ποιεῖται τὰς ὑπὸ αζη καὶ ὑπὸ γηζ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. Ὅτι μὲν ἐν ἑκ' ἀσύμπτωτοι αἰ εὐθεῖαι δέδεικται. Εἰ δὲ συμπίπτουσιν ἡ, ἐπὶ τὰ αγ συμπεσύνται, ἡ ἐπὶ τὰ βδ. Συμπιπέντωσαν ἐπὶ τὰ βδ καὶ τὰ κ. Ἐ'πει ἐν αἰ μὲν ὑπὸ αζη καὶ γηζ δύο ὀρθῶν εἰσὶν ἐλάσσους, αἰ δὲ ὑπὸ αζη βζη δύο ὀρθαῖς ἴσαι, κοινῆς ἀφαρεθείσης τῆς ὑπὸ αζη, ἡ ὑπὸ γηζ ἐλάσσων ἔσται τῆς ὑπὸ βζη. Τριγώνων ἄρα τῶν ηζκ ἡ ἐκ τῆς ἐν τῆς καὶ ἀπεναντίον ἐλάσσων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα καὶ τὰ αὐτὰ συμπίπτουσιν. Ἀλλὰ μὲν συμπίπτουσιν. Καὶ α' ἄτερα ἄρα ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται, καὶ α' τῶν δύο ὀρθῶν εἰσὶν ἐλάσσονες.

T

Sint

Sint enim in digrammate XIII. duæ rectæ  $\alpha\beta$ .  $\gamma\delta$ . in quas incidat recta  $\epsilon\zeta$  faciens angulos  $\alpha\zeta\eta$  &  $\gamma\eta\zeta$  minores duobus rectis. Reliqui ergo anguli majores erunt duobus rectis. Demonstratum vero antea fuit lineas hasce necessario concurrere. Quoniam ergo concurrunt, fiet utique illud vel versus  $\alpha\gamma$ , vel versus  $\beta\delta$ . Concurrant versus  $\beta\delta$ . circa  $\nu$ . Quoniam ergo  $\alpha\zeta\eta$  &  $\gamma\eta\zeta$  duobus rectis sunt minores, anguli autem  $\alpha\zeta\eta$   $\beta\zeta\eta$  æquales duobus rectis, aempto communi, erit  $\gamma\eta\zeta$  minor quam  $\nu\beta\eta$ . In triangulo ergo  $\nu\zeta\eta$  angulus externus interno & opposito minor erit: quod est absurdum. Non ergo versus hasce partes concurrent. At concurrunt tamen. Fit ergo illud versus alias partes, ubi anguli sunt duobus rectis minores. Et tali quidem modo Ptolemæus hæc demonstrare fuit conatus. Nec tamen ejus demonstratio Proclo placuit. Id enim assumere videtur quod adversarius non tam facile sine demonstratione concedet. Quod enim in prima demonstratione ait Si  $\alpha\zeta\eta$   $\gamma\eta\zeta$  duobus rectis sunt majores, ergo  $\beta\zeta\eta$   $\delta\eta\zeta$  duobus rectis erunt minores id facile concedet adversarius. Neque tamen ideo hanc consequentiam admittet, quod  $\beta\zeta\eta$   $\delta\eta\zeta$  sint etiam majores duobus rectis. Id enim per se evidens non est. Adeoque neque absurdum illud ex hypothese adversarii colligitur, quod inde deducere vult Ptolemæus, suaque hoc modo demonstrare. Aliam etgo viam Proclus est ingressus. Et primo quidem Axiomatis loco supponit. Si duæ rectæ angulum ab una parte facientes, ab altera parte in infinitum producantur, tum  
 quas-



*quascunque magnitudines finitas comprehendere posse.*  
 Inde demonstrat quæ unam parallelarum secantem recta  
 linea, etiam alteram parallelarum secare. Demum Po-  
 stulatum hoc Euclideum aggreditur. Sed ipsum Pro-  
 clum loquentem audiamus. Πρὸς δὲ τὸν τῷ εἰρητιζῶντα  
 κατασκευαζόμενον ἰδεῖν, λέγω, ὅτι παρ' ὑμῶν ὅτι δεῖ πορλαβεῖν ἀ-  
 ξιῶμα τοῦ εἶναι ὅτι καὶ Ἀριστοτέλης ἐχρήσατο, κατασκευάζων πε-  
 περασμένον εἶναι τὸν κόσμον. Ἐάν' ἀφ' ἑνὸς σημείου δύο ἐκβάλλον-  
 ται εὐθεῖαι γωνίαν ποιεῖσαι ἐπ' ἀπείρον, πᾶν πεπερασμένον μέγε-  
 θος ὑπερβάλλει ἢ διάστασις αὐτῶν τῶν εἰς ἀπείρον ἐκβαλλομέ-  
 νων. Ἐδείξε γοῦν ἐκεῖνος ὅτι ἀπειρῶν ὅσων τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου  
 πρὸς τὴν περιφερείαν ἐκβεβλημένων, ἀπείρον εἶ μετὰ ξύ. Πε-  
 περασμένους γὰρ ὄντας, αὐξήσαι τὴν διάστασιν ἀδύνατον. ὥστε ἐκ  
 ἀπείρου αἰ εὐθεῖαι. Παντὶς ἔν τῷ λεγόμενῳ πεπερασμένῳ μεγέ-  
 θους μείζον ἀλλήλων διαστήσονται ἐκβαλλόμενα ἐπ' ἀπείρον αἰ  
 εὐθεῖαι. Τέττις δὲ πορὺποθέντες, λέγω, ὅτι ἐάν' παραλλήλων εὐ-  
 θεῶν τὴν ἑτέραν τις εὐθεῖαν τέμνῃ, μετὰ καὶ τὴν λοιπὴν. Ἐστῶσαν  
 γὰρ παράλληλοι αἰ αβ γδ, καὶ τεμνέτω τὴν αβ ἢ ἐξ κ. λέγω ὅτι  
 τὴν γδ τεμνέ. Ἐπεὶ γὰρ δύο εὐθεῖαι εἰσὶν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῷ ζ εἰς  
 ἀπείρον ἐκβαλλόμενα αἰ βζ ζή. παντὶς μεγέθους μείζονα ἔχουσι  
 διάστασιν. ὥστε καὶ τέττις ὅσον ἐστὶ τὸ μετὰ ξύ τῶν παραλλήλων.  
 ὅτι ἀν' ἔν μείζον ἀλλήλων διεσῶσιν, τῆς τέττων διαστάσεως, τεμνέ ἢ  
 ζὴ τὴν γδ. Ἐάν' ἄρα παραλλήλων τὴν ἑτέραν τέμνῃ τις εὐθεῖα,

T 2

τεμνέ

τεμῆι καὶ τὴν λοιπὴν. Τὸτε ἀποδειχθέντες ἀκολούτως δεί-  
 ξομεν τὸ ἀποκείμενον. Ἐγώσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ γδ καὶ ἐμ-  
 πιπύτω εἰς αὐτὰς ἡ αζ. ἐλάσσονας δύο ὀρθῶν ποιῶσα τὰς ὑπὸ  
 βεζ δεζ. λέγω ὅτι συμπεσύνῃαι αἱ εὐθεῖαι κατὰ ταῦτα τὰ μέ-  
 ρη, ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο εὐθειῶν εἰσὶν ἐλάσσους. Ἐπειδὴ γὰρ αἱ ὑπὸ θεζ  
 δεζ ἐλάσσους εἰσὶν δύο ὀρθῶν τῇ ὑπεροχῇ τῶν δύο ὀρθῶν, ἔγω ἴσμι ἢ  
 ὑπὸ θεβ καὶ ἐκβεζλήσθω ἡ θε ἐπὶ τὸ κ. Ἐπεὶ ἔν εἰς τὰς κβ γζ  
 ἐμπέπλωκεν ἡ εζ, καὶ ποιῇ τὰς ἐνθς δύο ὀρθαῖς ἴσας τὰς ὑπὸ θεη,  
 δεζ, παράλληλοι εἰσὶν αἱ θκ γδ εὐθεῖαι· καὶ τέμνει τὴν κθ ἢ αβ.  
 τεμῆι ἄρα καὶ τὴν γδ διὰ τὸ ἀποδεδειγμένον. Συμπεσύνῃαι ἄρα  
 αἱ αβ γδ κατὰ μέρη ἐκείνα, ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὥστε  
 δέδεικται τὸ ἀποκείμενον. *Illi vero qui hæc accuratius  
 scire discupit, hæc dicimus, quod necessarium sit illud  
 Axioma supponere, quo Aristoteles etiam usus est, cum  
 demonstrare vellet mundum esse finitum. Si ab uno signo  
 duæ rectæ lineæ in infinitum educantur, quæ angulum  
 faciunt, earum distantia, cum in infinitum producun-  
 tur, quamcunque finitam magnitudinem excedet. Et  
 demonstratum quidem est Aristoteli, si infinitæ fuerint  
 rectæ quæ à circulo ad peripheriam ducuntur, tum et-  
 iam intervallum rectarum infinitum esse. Finiti enim  
 intervallum augere, est impossibile. Ideoque nisi inter-  
 vallum infinitum fuerit, neque lineæ infinitæ erunt.  
 Quantacunque ergo sumatur magnitudo, dummodo  
 finita, intervallum rectarum in infinitum productarum  
 illam*



illam necessario excedit. Hoc autem supposito, dico si re-  
 cta linea unam rectorum parallelarum secuerit etiam al-  
 teram secabit. Sint enim parallelæ  $\alpha\beta$   $\gamma\delta$  in figura XII. &  
 secet quidem  $\epsilon\zeta$  recta rectam  $\alpha\beta$ . dico quod eadem  $\epsilon\zeta$  re-  
 ctam  $\gamma\delta$  secabit. Cum enim duæ rectæ ab eodem pun-  
 cto  $\epsilon$  producantur in infinitum, rectæ nempe  $\epsilon\zeta$  &  $\epsilon\eta$   
 ergo intervallum earum quacumq; magnitudine aut di-  
 stantia majus erit. Ideoque & distantiam parallela-  
 rum linearum  $\alpha\beta$  &  $\gamma\delta$  excedet. Ubi autem interval-  
 lum rectorum majus fuerit intervallo parallelarum,  
 secabit  $\epsilon\eta$  rectam  $\gamma\delta$ . Si igitur unam parallelarum  
 recta secuerit, etiam alteram secabit. Hoc autem an-  
 tea demonstrato, consequenter idipsum demonstrabi-  
 mus, quod præ manibus nunc habemus. Sint duæ rectæ  $\alpha\epsilon$   
 $\gamma\delta$  figura XIV. in quas incidat  $\epsilon\zeta$  faciens angulos  $\beta\epsilon\zeta$   $\delta\zeta\epsilon$   
 duobus rectis minores, dico, quod rectæ coincident ver-  
 sus eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.  
 Quoniam enim  $\beta\epsilon\zeta$   $\delta\zeta\epsilon$  minores sunt duobus rectis, ex-  
 cessu illo quo duo recti hosce excedunt, constituatur an-  
 gulus  $\theta\epsilon\beta$  huic excessui æqualis, ejiciaturq;  $\theta\epsilon$  in  $\alpha$ .  
 Quoniam ergo recta  $\epsilon\zeta$  in rectas  $\alpha\theta$   $\gamma\delta$  incidens in-  
 ternos angulos duobus rectis æquales facit, nempe  
 angulos  $\theta\epsilon\zeta$  &  $\delta\zeta\epsilon$ , erunt  $\alpha\theta$  &  $\gamma\delta$  parallelæ. Se-  
 cat autem recta  $\alpha\beta$  rectam  $\alpha\theta$  ergo & rectam  $\gamma\delta$  se-  
 cabit, per illud quod nunc demonstravimus. Concur-  
 rent igitur  $\alpha\beta$   $\gamma\delta$  versus illas partes, ubi sunt anguli  
 duobus rectis minores; quod demonstrare oportebat.

T 3

At-

Atque in hac quidem demonstratione præter Axioma quod heic adducitur, etiam propositionem XXVII lib. I. supponit. Cætera in demonstratione clara sunt, nec ullam habent difficultatem. Satis quidem compertum habeo, solere Euclidem, ex antecedentibus, ea quæ immediate sequuntur demonstrare, atque hoc modo, Propositionem quæ tradit duos angulos trianguli internos & oppositos externo esse æquales, ex antecedente Propositione demonstrari, quæ quidem ex eo quod nunc explicuimus Theoremate dependet. Id quoque cognitum mihi est, posse illam ipsam Propositionem longe breviori via expediri, nempe si in Propositione XVI. demonstratum fuerit lineas quæ angulos externos faciunt in directum sibi jacere: sicut illud quoque alibi à nobis factum est. sed quandoquidem Euclidis Propositiones eo, quem ex Proclo laudavimus, modo, satis bene nunc demonstrantur, nolumus Lectorem diutius his detinere. Quoniam vero omnia Geometriæ principia, quæ ab Euclide I. libro Elementorum ponuntur, vera esse sunt deprehensa: nunc quid in ipsis conclusionibus à quibusdam desideratum fuit, paucis attingemus.

## CAP. XXII.

Diximus antea ubi contra Sextum Empiricum disputavimus, argumentum quod contra X. Propositionem libri I. Element. proponit, falsa niti hypothesi, nempe lineas ex punctis componi. Cum ergo  
huic



huic objectioni alibi satisfactum sit, eo lectorem remittimus. Præter Pyrrhonios autem seu Scepticos, alios quoq; adversarios habuere Geometræ nempe Epicureos, qui quidem non falsitatis principia Geometrica arguebant, sed potius ut nimis accurate etiam res manifestas demonstrantia irridebant. Nota est Epicureorum vox de Propositione XX. lib. I. Elementor. eam nempe Propositionem adeo per se claram & perspicuam, ut ejus veritas etiam asino constet. Proclus ad hanc Propositionem. Τὸ θεώρημα διασύρειν μὲν εἴωθασιν, οἱ Ἐπικυρεῖοι καὶ ὄντω λέγοντες αὐτοῖς δηλοῦν εἶναι καὶ μηδεμίαν δεῖσθαι κατασκευῆς. Ομοίως δὲ ἀντιπρόδημονος εἶναι ἔργον τὰ ἐμφανῆ παραμυθίας ἀξιοῦν, καὶ τοῖς ἀδύλοις, αὐτῶν περὶ πειθεῖν. Οὐ γὰρ ταῦτα συγγέων φανερός ἐστὶ τὸ τε ἀναπόδεικτον ἀγνοῶν. Οὐ δὲ καὶ ὄντω τὸ προκείμενον θεώρημα γνώριμον κατασκευάζουσιν ἐκ τῶ ἰσθέντος χόρτου καὶ τὸ ἕτερον πέρας τῶ πλευρῶν, τὸ ὄντων τὴν μίαν ὁδὸν εἶναι πλευρῶν, ἀλλὰ μὴ τὰς δύο, τριτοῦ δὲ ὁδηγούμενον. *Consvenerunt quidem Epicurei hoc Theorema traducere, dicentes asino illud esse cognitum, neq; ulla indigere demonstratione. Eum vero qui manifesta demonstrare conatur, non minus inscite agere, quam qui ignotis sine demonstratione fidem habet. Qui enim hæc confundit, manifeste deprehenditur ignorare, quid illud sit, quod indemonstratum supponere tantum decet. Quod vero*

vero

vero præsens negotium etiam asino cognitum sit, inde probant, quod posito gramine circa unum terminum lateris alicujus, asinus illud tantum latus emetiatur, neque circumitione gaudeat, duove latera conficiat. Huic vero dubio ita respondit Proclus: Πρὸς δὴ ταῦτα λεγέον ὅτι σαφές μὲν ἔστι τιτὼ αἰδοῖσιν ὅτι τὸ θεώρημα, ἔγω δὲ σαφές ἔστι τὸ ἐπιδημονικὸν λόγον. Πολλὰ γὰρ τῶν πέπονθεν τῶν πραγμάτων, οἷον θερμαίνει τὸ πῦρ καὶ τῶν τῇ αἰδοῖται σαφές. Ἀλλὰ πῶς θερμαίνει, ἥτις ἐπιστήμης ἔργον ἐλεῖν, πότερον, ἀσωμάτω δυνάμει ἢ σωματικῇς θερμῇ, σφαιρικοῖς μόλοις ἢ πυραμυδαίοις. Πάλιν ὅτι κινεῖται τῇ αἰδοῖται δῆλον, πῶς δὲ κινεῖται παραγῆται τῷ λόγῳ χαλεπὸν, κατὰ ἀμερές ἢ κατὰ διάστημα, πῶς δὲ ἀπειρα διίμεν, εἰς ἀπειρον γὰρ διατεῖται πᾶν μεγέθος. Ἐγὼ κρίνω καὶ τὸ τριγώνον τὸ μέγιστον εἶναι τὰς δύο, ἥτις μιᾷ, τῇ αἰδοῖται κατὰ φανέρους, ἀλλὰ πῶς τῶν γινώσκει τῆς ἐπιστήμης ἔργον εἶπεῖν. *Ad hæc vero dicendum est quod Theorema hoc sensibus quidem manifeste verum apprehendatur, non vero juxta rationem scientificam. Atque id quidem multis in rebus contingit. Ignem enim calefacere, sensibus quidem manifestum est. quomodo autem calefaciat, id scientia discernere debet, utrum virtute incorporali, aut corporalibus sectionibus, iisque vel Sphericis vel Pyramidalibus. Rursum, quod moveamur manifestum est, quomodo vero moveamur etiam rationi exhibere est per quam difficile, utrum secundum*



*cundum indivisibile, aut secundum intervalla. quo item modo infinita transeamus. omnis enim magnitudo in infinitum dividitur. Quamvis ergo sensibus sit manifestum, duo trianguli latera majora esse tertio; tamen quomodo id fiat, sola scientia dicere potest. Et sane non sine causa heic quæri posset, quæ fiat? quod in triangulis rectilineis duo latera semper sint majora reliquo, cum in aliis triangulis id verum absolute non sit. Potest enim dari triangulum mixtum, constans nempe binis lateribus rectilineis & una portione peripheriæ circuli, in quo, unum hoc latus majus erit duobus reliquis. Si enim latera rectilinea fuerint circuli radii, angulus autem his comprehensus major. 115. gradibus: dico arcum circuli 115. gr. hoc est, tertium latus hujus trianguli, omnesq; adeo arcus hoc majores, usq; ad semicirculum, quamdiu angulus ullus concipi potest, majores esse binis radiis: adeoque, in omnibus hisce casibus, duo latera trianguli minora tertio. Bini enim radii æquantur integræ diametro. Diameter autem circuli se habet ad peripheriam ut 22. ad 7. juxta rationem Archimedeam, adeoque Hemiperipheria ad diametrum, ut 11. ad 7. Septem ergo undecimæ partes semicircumferentiæ æquantur ipsi diametro, adeoque binis radiis. At si circumferentia dimidia in 11. partes secetur, cuius parti convenient grad. 16. 21'. 49'.  $\frac{1}{11}$ . adeoque septem undecimæ sunt 114. 32'. 43'.  $\frac{11}{11}$ . æquales integræ diametro, & per consequens binis radiis, quæ sunt latera trianguli mixti. Duo ergo latera*

V

in

in illo quidem triangulo, sunt æqualia tertio: ubi vero ulterius ventum fuerit ad 115. gradus & ultra, duo latera sunt minora tertio. Quod si Archimedea ratio non placuerit, quæ tamen satis clare demonstrat, id quod nos supponimus: potest ex subtilissima & omnium accuratissima ratione Ludolphi van Ceulen computus deduci, & veritas hujus problematis non minus constabit. Propter has ergo causas necessarium erat demonstrare Propositionem XX. lib. I. Elementorum, ut constaret, id quod in mistis triangulis verum absolute non est, in rectilineis verum esse. Et sane multa sunt quæ sensibus aliter apparent, quam intellectus & ratio ea revera esse demonstrat. Epicurei solem bipedalem pronunciabant, quod talis appareret. Non ignoro insignem Philosophum fuisse Epicurum & naturalis scientiæ perquã peritum, ideoque, nec Geometriæ rudem fuisse arbitror, quamvis illud de ipso affirmare videatur, vel saltem indicare Sextus Empiricus. Inter assēctas tamen hujus, vel illos saltem, qui nomine tenus Philosophi Epicurei erant, multi rudes atque indocti reperiebantur, quorum & hanc fuisse objectionem arbitror, ut & quædā cæterorū absurdorū, quæ Epicureis tribuuntur. Nam longe rectius in quibusdā sapuisse Epicurum lemmata ipsius quæ apud veteres habemus quæque magna diligentia, insignis ille Philosophus & Mathematicus Petrus Gassendus collegit, abunde commonstrant. Sed ut ad argumentum revertar, dico multa sensibus aliter apparere quæ  
reve-



revera sunt, ut Sol bipedalis, stellæ vix unciales, quæ tamen ratio demonstrat longe majora esse. Principia ergo sapientiæ non ea sunt quæ solis sensibus vera deprehenduntur, sed quæ ratio vera esse judicat atq; ab errore libera. Ita ergo demonstratum est non debere Geometras male audire quod res sensibus claras rationibus firment, cum non ea omnia vera sint, quæ sensibus vera apparent, sed quæ intellectu & ratione vera esse deprehenduntur. Et tantum quidem contra Epicureos. Restat quidem alia adhuc objectio, quorundam veterum qui negabant, duas rectas non concurrere in infinitumeductas. Argumentum est apud Proclum lib. IV. ad propof. XXIX. nec demonstratio ab similibus ei quæ est ad figuram no. 111. nostram. Verum illa id tantum concludit duas lineas non concurrere in linea, sed in puncto: quod & verum est. Nam simpliciter dicere quod non concurrant, id & sensibus, & aliis demonstrationibus est contrarium, præcipue illi quam ex Proclo ultimo loco attulimus. Atq; ita omnia illa, quæ alicujus momenti vel ab aliis primo Euclidis libro Element. opposita fuere, vel jure opponi possunt, ea quæ fieri potuit brevitate exposuimus; unaq; demonstravimus, principia Geometriæ in omnibus clara certa ac perspicua esse. Præcipue vero Geometricas veritates à falsitatibus Sexti Empirici vindicavimus, rati gratam hac in parte nos operam præstituros iis, qui gravioribus occupati, calumnias istius viri rejicere & falsitatis convincere

re nequeunt. Ipsum quoque Euclidem vera per omnia tradidisse demonstravimus, quamvis alicubi non satis commode egerit, atque ea pro demonstratis supposuerit, quæ vera quidem sunt, sine demonstratione tamen vera esse non intelliguntur: quæ ideo nos ex antiquorum mente demonstravimus, eorumque παραδείγματα indicavimus, non ut opprobrio afficiantur, sed ut alii similes scopulos caveant. Quoniam vero nihil præterea in prioribus libris Euclidis compertum habeam, quod falsitatis, à quoquam sit accusatum, aut jure accusari possit, ad quintum librum Elementorum pedem promovebo, in quo aliquot propositiones duas imprimis VIII. & X. impugnandas suscipit Meibomius, idque non quod minus accuratè essent demonstratæ, sed quod falsa niterentur definitione, ea nempe quæ est libr. V. septima. Hujus ergo viri argumenta primum examinabimus, totamque illam rationem brevissima via percurremus. Inde ad aliud caput accusationis Meibomianæ perveniemus, in quo alios Geometras ac nominatim Theonem Alexandrinum & Eutocium Ascalonitam, & recentiores ignorantia accusat, quodque veteres Geometras non intellexerint. Equidem non me fugit, multa à Petro Ramo viro doctissimo atque insigni Geometra contra methodum Euclidean fuisse proposita: quæ tamen ideo tacitus prætereo, quod illud vitium, non ipsas veritates concernat, nec tam Geometricum sit, quam Logicum



gicum. Fuere alii qui de natura demonstrationum Mathematicarum, varia disputarunt; quibus egregiè satisfecit Franciscus Barocius patritius Venetus in celeberrima Pataviensi Academia Mathematicum Professor Publicus, qui in illa Oratione, quam publice habuit, tum cum primum Mathemata profiteri inciperet, variis argumentis tam ex auctoritate, quam ex solida ratione petitis, pererudite ac solide comprobavit demonstrationes Mathematicas non modo vere & proprie demonstrationes appellari, secus quam aliqui sentirent, sed & omnium primas esse ac certissimas. Qui ergo hæc plenius cognita habere cupit illum adeat. Neq; enim his diutius immorari libet, cum ipsa prima principia totaq; Geometrica materia à cavillis malevolorum satis sit vindicata. His igitur in Dei nomine primum librum finiamus, ac sequentis initium faciamus.



158

WILHELMI LANGI  
DE  
VERITATIBUS  
GEOMETRICIS.  
LIBER II.  
CAPUT I.

**C**Um superiori libro ea omnia explicata sint, quæ ab aliis contra veritates Geometricas, primo Elementorum Euclidis libro contentas mota fuere; eaq; una demonstrata, quæ in dubium jure vocari possunt, nec tamen ab Euclide ulla probatione sunt confirmata, sed ut vera & per se clara, ab ipso assumpta: hoc sequenti libro ea nobis pertractare animus est, quæ ad confutationem eorum spectant, quæ Marcus Meibomius, in dialogo de proportionibus, & contra Euclidem, & contra alios veteres novosq; Geometras falsa in medium adduxit. Equidem si Meibomius ex eo capite accusationem suam contra Euclidem fuisset exorsus, quo P. Ramus usus est, nempe multa scitu necessaria Euclidem omisisse, atq; ea quæ habet, satis confuse tradidisse, nec



S nec omnia demonstrasse quæ demonstrari debebant, sed multa pro veris supposuisse, quæ vera quidem sunt, à Geometra autem supponi non debent sine demonstratione: facile quidem & me, & alios sibi habuisset  $\delta\mu\epsilon\psi\phi\sigma\varsigma$ . Nunc vero quoniam his omnibus omissis, falsa se heic invenisse dicat, ipsaq; principia libri V. Elementorum convellere & labefactare conetur, quæ tamen longe sunt verissima, ut in sequentibus patebit, operæ precium me facturum arbitrabar, si & ipsius Euclidis sententiam totamq; illam doctrinam, qua maxime fieri posset brevitate explicarem, & veritate harum rerum demonstrata, fontes erroris Meibomiani detegerem, ipsiusq; argumenta refellerem. Quoniam vero hæc doctrina, quæ est de majore aut minore ratione, accurate demonstrari aut intelligi non possit, nisi altera illa quæ est de rationum compositione huic adjungatur; quam quidem Meibomius Euclidem aliosq; veterum intellexisse & bene etiam tradidisse ait, posteriores autem Geometras veterum mentem non cepisse, sed multa perperam innovasse; totam hanc rationum & proportionum naturam benevolo lectori ob oculos ponere decrevi, ut & illi, qui in Mathematicis non usq; adeo sunt versati, ut penitiora ipsius intelligant, per se tamen perspiciant, quid illud sit, quod Meibomius contra Euclidem & Geometras se invenisse gloriatur; ac demum sciant quam solida ac certa sint Geometriæ principia, & quam male sibi ipsis consulant, qui in his disciplinis probabilita-

bilitatem ponunt, taliaq; admittunt, quæ in utramque partem disputari possunt. Adsis Iesu & faue.

## CAP. II.

Quantum Geometræ vocant omne illud quod vel mensura, vel numero, vel pondere comprehenditur; seu quod idem est, vel juxta magnitudinem consideratur, vel juxta multitudinem, vel juxta pondus. Architas Tarentinus perantiquus & celeberrimus Geometra, Τὰς ποσότης inquit διαφοραί τῶν. Τὸ μὲν γὰρ αὐτὰς ἐντὶ ἐν ῥόπῃ ὡς τὸ ἑλάνθον. Τὸ δὲ ἐν μεγέτει, ὡς τὸ δίπαχυ. Τὸ δὲ ἐν πλάθει ὡς τὸ δέκα. *Quantitatis differentie tres. Vel enim in pondere consistit, ut talentum: vel in magnitudine, ut bicubitale: vel in multitudine, ut decem.* Hoc vero quantum vel in se consideratur, vel quatenus respectum habet ad aliud. Atq; in se quidem, quatenus certam habet magnitudinem, certoque numero aut pondere comprehenditur. In singulis enim quanti speciebus hæc diverso modo considerantur. In magnitudine enim, & figura, ut triangulare, quadratum, pentagonon &c. In multitudine autem seu numero sola ποσότης. In ponderibus vero gravitas, quorum natura & affectiones in distinctis scientiis explicantur, magnitudinum quidem in Geometricis, Numerorum in Arithmeticis, & ponderum in Staticis, quæ tamen scientiæ plurima communia principia habent, communesq; demon-  
strati-



strationes & veritates, quamvis in quibusdam etiam dissideant.

Inter alia vero quæ communia habent, etiam hoc est, quod, cum ejusdem generis aut speciei quanto singula conferri possint, magnitudo quidem cum magnitudine, numerus cum numero, & pondus cum pondere: quæ quidem collatio seu mutuus respectus λόγος Græcis dicitur; Latinis ratio.

In Geometricis autem hanc rationem ita definit Euclides Λόγος ὅστις δύο μεγεθῶν ἢ καὶ πηλίκου ποσὸς ἀλλήλα ποιὰ ῥέσις. *Ratio est, duarum magnitudinum ejusdem generis, quæcunq; mutua relatio secundum quantitatem.* In Arithmetice autem ratio erit, quæcunq; mutua duorum numerorum relatio secundum quantitatem. Ac deniq; in Staticis ratio erit mutua duorum ponderum habitudo secundum quantitatem. Notandum vero est in Arithmetice quemcunq; numerum finitum & terminatum cum quocunq; numero finito & terminato conferri posse, sicut etiam pondera cum ponderibus. In Geometricis autem non quamcunq; magnitudinem cum quacunq; magnitudine posse comparari. Neque enim ratio rectæ lineæ ad quadratum dari potest. Duo quidem quadrata possunt invicem eandem habere rationem, quam linea ad lineam. Neq; tamen ideo ratio lineæ ad quadratum datur. In Arithmetice autem & Staticis inter quoscunq; numeros datos & inter quæcunq; pondera data, etiam ratio datur.

X

Om-

Omnis autem ratio duobus terminis comprehenditur, prior dicitur: terminus à quo seu antecedens; alter terminus ad quem seu consequens. Pro diversitate autem horum terminorum diversæ rationes constituuntur.

Si enim ambo termini æquales fuerint, oritur ratio æqualitatis. Ut si duæ lineæ æquales fuerint, vel duo quadrata, duóve cubi, aut solida corpora æqualia. In numeris autem ut 1. ad 1. vel 2. ad 2. 6. ad 6. atque sic in infinitum. In ponderibus denique talentum Atticum ad talentum Atticum, & mina ad minam, & libra ad libram.

Si autem termini inæquales fuerint, oritur ratio inæqualitatis: estq; duplex, excessûs, vel defectûs. Etenim vel antecedens terminus major est consequente, adeoque excedit terminum alterum, unde ratio est excessûs. Scholiastes Græcus Euclidis vocat λόγον τῆς ὑπεροχῆς rationem excessûs, apte admodum ac concinne, quam recentiores quidam majoris inæqualitatis dixere; sicut alteram huic oppositam minoris inæqualitatis, quæ rectius juxta priora ratio defectûs dicitur, quando nempe antecedens minus est consequente. Ut si quadratum cujus area esset cc. pedum quadratorum, conferretur cum quadrato areæ C. pedum quadratorum: si prius quadratum esset antecedens, & posterius consequens: ratio excessûs diceretur. Ita in numeris ratio 2. ad 1. est ratio excessûs seu τῆς ὑπεροχῆς, ratio autem 1. ad 2. est ratio



ratio defectus. Idipsum in ponderibus liquet. Ratio enim talenti ad minam; libræ, ad unciam est excessus: ratio autem minæ ad talentum, vel uncia ad libram est ratio defectus.

Et in numeris quidem hæc ratio semper cognita est & effabilis. Semper enim datur excessus unius numeri super alium, qui alio numero exprimitur. In magnitudinibus autem ratio illa non semper exprimi potest. Sic ratio diagonalis quadrati ad latus ejusdem, est ineffabilis. nullo enim numero exprimi potest, ut Euclidi est demonstratum Elem. lib. X. propos. CXVIII. quo in libro. duo quidem genera magnitudinum commensurabilium proponit, unum quod absolute est commensurabile, cuicunq; datæ magnitudini, adeoque ratio inter ea se habet ut numerus ad numerum. Sic magnitudo 100. pedum magnitudini 10. pedum est commensurabilis, adeoque duæ hæ magnitudines rationem habent effabilem λόγον ἔχον seu quam 100. ad 10. numerus ad numerum. Alterum est potentia commensurabile: ut diagonalis quadrati ad latus, simpliciter quidem & absolute loquendo commensurabilis non est; potentia tamen invicem commensurantur. Quadratum enim descriptum super diagonali, est duplum quadrati alterius per XLVII. I. Elem. adeoque quadrata horum sunt commensurabilia, & habent se ut numerus ad numerum, 2. ad 1. Cætera vero quæ neque longitudine, neque quantitate sunt commensurabilia, irrationalia dicuntur, quod ratio

X 2

eorum

eorum numeris, nullo modo explicari possit. vide V. VI. & VII. propositiones libr. X. Elem. Euclidis, & præcipue X. ubi modus docetur inveniendi magnitudinem datæ magnitudini incommensurabilem, tam magnitudine, quam potentia.

In Geometricis ergo alia ratio est effabilis, alia ineffabilis. Effabilis quæ certo numero explicatur, ineffabilis, quæ certo numero non explicatur. quæ quidem omnia ab Euclide demonstrantur libro X. Elem. Propof. V. VI. VII. & VIII. In Arithmetice autem omnes numeri sunt effabiles. Proclus libro II. comm. in I. Eucl. Το μὲν γὰρ πάντα λόγον ἔναι ρητὸν Αἰθμητικῇ προσήκει μόνον, Γεωμετρίας δὲ ὑδαμῶς. Εἰσι γὰρ ἐν αὐτῇ καὶ ἄρρητοι λόγοι. Τὰ δὲ τῶν συμμετρῶν Αἰθμητικῇ μὲν θεωρεῖ πρώτως, γεωμετρία δὲ δευτέρως, ἐκείνην μιμεμένη. διὸ καὶ τὰ σύμμετρα τῶν αὐτὰ ἀφείλεται ὅσα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν αἰθμὸς πρὸς αἰθμὸν, ὡς τῆς συμμετρίας προσηγμένης ἐν αἰθμοῖς ὑφισταμένης. Ὅπως γὰρ αἰθμὸς ἐκεῖ καὶ τὸ σύμμετρον. καὶ ὅπως τὸ σύμμετρον, ἐκεῖ καὶ ὁ αἰθμὸς. *Nam quod omnes rationes sint effabiles, id soli convenit Arithmeticae, non vero Geometriae. Sunt enim in hac etiam ineffabiles rationes. Et post aliquot verba. Ea autem quæ sunt commensurabilia inuicem, Arithmetice quidem primario considerat, Geometria autem secundariò, Arithmetice imitata. Quapropter commensurabilia in Geometricis definiuntur, quæ rationem*



*tionem habent invicem quā numerus ad numerum. Ubi enim numerus illic commensurabile. & ubi commensurabile, illic etiam numerus.*

Differunt ergo inter se rationes Geometricæ & Arithmeticæ, quod hæc quidem omnes accurate explicari possint, illæ vero non item. Nec tamen ideo Arithmeticæ rationes perfectiores Geometricis. Possunt enim in Geometricis quadrata juxta quamcunque rationem dari, duplam, triplam, quintuplam, imo quamcunque. In Arithmeticis vero id fieri nequit. Quadratum enim alterius quadrati duplum in Arithmeticis non datur.

Quod vero de magnitudinibus verum est, quasdam inter eas esse incommensurabiles, adeoque earum rationes inexplicabiles; id etiam in ponderibus locum habet. Possunt enim pondera non minus quam magnitudines in infinitum secari.

Prima ergo differentia rationum est, quod respectu terminorum, aliæ sint æqualitatis, aliæ inæqualitatis. Secunda, quod respectu eorundem terminorum, aliæ sint effabiles, aliæ ineffabiles. Prior omnibus rationibus, tam Arithmeticis quam Geometricis convenit: posterior in Arithmeticis locum non habet, quod illic omnes rationes sint effabiles.

Porro rationes inæqualitatis tam excessus quam defectus, in Arithmeticis quidem quinque species constituunt, quæ etiam in effabilibus Geometricis eadem sunt. Si enim duo inæquales numeri invicem

X 3

con-

conferantur, is qui major est altero, vel totum in se comprehendit aliquoties: vel non comprehendit. Si totum in se bis, terve, aut pluries continet, major dicitur multiplus, minor vero pars: ut binarius unitatis, & ternarius unitatis, senarius binarii. continet enim senarius totum binarium in se ter. Atque hoc ipsum in magnitudinibus verum est. Si enim magnitudo bis, ter, quaterve composita, aliam magnitudinem fecerit, composita magnitudo multipulum dicitur: ea vero ex qua componitur pars. Euclides initio V.

Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἐλάσσον ἢ μείζονος ὅταν κατὰ μετρήν τὸ μείζον. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζον ἢ ἐλάσσονος ὅταν κατὰ μερῆσιν ὑπὸ ἢ ἐλάττωτος. *Pars est magnitudo magnitudinis minor, majoris, quando mensurat majus. Multipulum vero est majus minoris quando mensuratur à minore.* Mensurare Geometris dicitur quod multiplicatum alterius quantitatem exactè æquat, neque majus est, neque minus. Sic ulna mensurat longitudinem centum ulnarum. Si enim ulna centies multiplicetur, æquabit longitudinem centum ulnarum. Quod si longitudo fuerit centum ulnarum & trium quartarum, tum illa istam longitudinem accurate mensurare non potest, verum alia tum mensura requiritur, nempe quarta pars ulnæ. Adeoque ulna quidem propriè atque accurate loquendo magnitudinis centum ulnarum pars est, non vero centum ulnarum & trium quartarum: cum eam non meti-



metiatur. Ita qvaternarius senarii pars non est, cum illum non metiatur. Proprie ergo loquendo, pars est, quæ in alio bis aut sæpius perfecte continetur, ut binarius in qvaternario, senario &c. ternarius in senario, novenario, & sic in infinitum. Et is qui alium in se continet numerus multiplex dicitur, & quantitas quæcunque multipla.

Quando ergo antecedens terminus consequentis multiplex fuerit, ratio dicitur multipla. Theo Smyr-næus libro de musica cap. XXIII. Πολλαπλάσιος μὲν ἐν ὅτῳ λόγῳ ὅταν ὁ μείζων ὅρος πλεονάκεις ἔχῃ τὸ ἐλάττωνα, τῷ μείζων ὅρος καὶ μετρήσῃ ὑπὸ τῷ ἐλάττωνο ἀπαρ-τιζόμενος ὡς μηδὲν ἔτι λείπεσθαι ἀπ' αὐτοῦ. καὶ κατ' εἶδος ἑξαπλασίον, ἕκαστος πολλαπλάσιος ὁ μείζων ὅρος λέγεται τῷ ἐλάττωνο ὁσάκις ἀν καὶ μετρήσῃ ἀπ' αὐτοῦ, οἷον ἀν μὲν δις, διπλάσιος, ἀν μὲν τρις, τριπλάσιος, ἀν μὲν τετράκις, τετραπλάσιος. καὶ κατ' εἶδος ἕξως. *Est itaq; ratio multi-plex quando major terminus pluries continet minorem: id est, quando majorem terminum minor integre meti-tur, nec ulla pars majoris residua superest. Et juxta eam speciem multiplicationis, unusquisq; major termi-nus multiplex minoris dicitur, juxta quā à minore men-suratur; ut si bis, dupla; si ter, tripla, si quater, qua-drupla, & sic in sequentibus. Hac ratione magni-tudo XII. pedum, dupla quidem est sex pedum: tri-pla, qvatuor pedum; quadrupla, trium; sextupla, duum,*

& duodecupla unius pedis. Et hæc prima species est effabilium rationum excessus.

Huic contraria ab altera parte est effabilis ratio defectus, quæ submultipla dicitur, quando nempe terminus antecedens est pars, consequens vero multiplex. Ἀνάπαλιν δὲ inquit Theologo laudato ὁ ἐλάττω ὃ μείζονος, μέρος ὁμώνυμον ὡς λόγος, καὶ μὲν τὸ διπλάσιον ἡμῶν καὶ δὲ τὸ τριπλάσιον τριημόριον. καὶ λόγος ὁ μὲν ἡμῶν, ὁ δὲ τριημόριος, καὶ ὅτι τῶν ἄλλων ὁμοίως. *Inverso autem modo se habet minor ad majorem. Et pars quidem rationi homonyma est. Pars enim dupli vocatur semis, tripli vero triens. Illa autem ratio subdupla dicitur seu dimidia hæc subtripla, & sic in aliis. Ita ratio duum ad quatuor est subdupla: ratio 2. ad 6. subtripla: 2. ad 8. subquadrupla: 2. ad 10. subquintupla: 2. ad 12. subsextupla: 2. ad 14. subseptupla: & sic in infinitum. Liqueat ergo ex his quid sit ratio subdupla, subtripla, subquadrupla. nempe quæ his cyphris indicantur  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{4}$  fitq; quando terminus antecedens consequentis termini, vel dimidius est seu subduplus, vel tertia quartave ejusdem pars.*

### C A P. III.

Quando autem antecedens terminus, nec pars est consequentis, nec multiplex ejusdem, & tamen eidem inæqualis, alia oritur ratio. Si enim antecedens majus fuerit consequente, ita tamen ut totum in se consequens



quens aliquoties non contineat, utiq; excedet illud vel una sui parte, vel pluribus. Si una parte, antecedens vocatur ἐπιμόριος; si pluribus partibus, ἐπιμερής. De priori ita Nicomachus Gerasenus Arithmetices libr. I. Ἐπιμόριος δὲ ὅστιν ἀριθμὸς ὅς τ' ἐμείζονος δεύτερον τῇ φύσει καὶ τῇ ἰσχύϊ εἶδης, ὁ ἔχων ἐν ἑαυτῷ τὸ συγκεινόμενον ὅλον, καὶ μόριον αὐτοῦ ἐν π. Ἀλλ' ἐὰν ἡμισυ ἢ τὸ μόριον, καλεῖται ἡμόλιος εἰδικῶς ὁ τῶν συγκρινόμενων μείζων, ὑφημιόλιος δὲ ὁ ἐλάσσων. Ἐὰν δὲ τέλει, ἐπίτερις τε καὶ ὑπεπίτερις, καὶ αἰεὶ οὕτως, μέχρι παντός προχωρῶν συμφάνησιν σοι. *Numerus autem epimorius (seu superparticularis) secunda majoris numeri species est, & natura & ordine, qui quidem in se continet correlatum totum & unam ipsius partem. Quæ quidem pars si dimidia fuerit, major collatorum numerorum vocatur sesquialter, minor vero subsestquialter: si vero tertia pars, sesquitertius & subsestquitertius: atq; ita in perpetuum quoadusque progrediatis, semper tibi convenient.* Ratio ergo inter tales numeros, talesve magnitudines vocatur ἐπιμόριος. Theo Smyrnæus lib. II. cap. 24.

Ἐπιμόριος δὲ ὅστις λόγος ὅταν ὁ μείζων ὅρος ἀπαξ ἔχῃ τὸ ἐλάττωνα καὶ μόριον ἐν π. τὸ ἐλάττωτος, τέστιν, ὅταν ὁ μείζων τὸ ἐλάττωτος ταυτὴν ἔχῃ τὴν ὑπεροχὴν ἥτις τὸ ἐλάττωτος ἀριθμὸς μείζων ὅστις, ὥς ἡ τετρας τῆς τριάδος. ὑπερέχει γὰρ αὐτῆς μονάδι, ἥτις ὅστις τῆς τριάδος τὸ τρίτον. καὶ ἡ ἑξὰς τῆς τετρα-

δος ὑπερέχει δύοιν, ἅλινά τῶν τεσσάρων ἡμισυ ὄντι. Διὸ καὶ  
 ὅτι τῆς τ' μερῶν ὀνομασίας ἕκαστος τ' ἐπιμορίων ἰδίας ἔτυχε προσ-  
 ηγορίας. Οὐ μὲν γὰρ τῶ ἡμίσει τ' ἐλάττονος μέρει ὑπερέχων, ἐφη-  
 μίολιος ὠνομασται, ὡς ἡ τριῖς τῆς δυνάδος, καὶ ἡ ἑξὰς τ' τετρα-  
 δος. αὐτὴν τε γὰρ ὅλην ἔχει τὴν ἐλάττονα καὶ τὸ ἡμισυ αὐτῆς.  
 Ἐν μὲν γὰρ τριᾷδι ἐνεστὶν ἡ δύας, καὶ τὸ ἡμισυ αὐτῆς ἡ μονάς. εἰ δὲ  
 τῇ ἑξάδι, ἡ τετράς, καὶ τὸ ἡμισυ αὐτῆς ἡ δύας. Πάλιν ὅν τῶ  
 τρίτῳ μέρει τ' ἐλάττονος ὑπερέχοντες, ἐπιτρίτῳ καλεῖνται ὡς ἡ  
 τετράς τ' τριᾷδος. οἱ δὲ τῶ τετάρτῳ ὑπερέχοντες ἐπιτέταρτῳ,  
 ὡς ὁ ἐ τῶν πινάκων, καὶ ὁ δέκα τῶν ὀκτώ, καὶ ὁμοίως προσκόπτον-  
 τες ἐπίπεμπτῳ τε καὶ ἑφεκτῳ καὶ ἐφέβδδμει ἐκλήθησαν πάντες  
 τ' ἐπιμορίοι ὄντες. *Ratio superparticularis, est quan-*  
*do major terminus minorem semel continet & partem in-*  
*super ipsius unam, id est quando major minorem supe-*  
*raverit excessu aliquo, qui minoris numeri sit pars, ve-*  
*luti quaternarius superparticularis est ternarii. u-*  
*nitatem enim excedit, quæ triens est ternarii, & senari-*  
*us excedit quaternarium duabus unitatibus, quæ sunt*  
*semis quaternarii. Quare à partium denominatione*  
*superparticulares singuli proprias appellationes nan-*  
*ciscuntur. Qui namq; minorem semisse superat, sesqui-*  
*alter dicitur, ut ternarius binarii: & senarius qua-*  
*ternarii. ipsos enim minores totos continent, ipsorumq;*  
*semisses. In ternario, namq; binarius continetur, &*  
*unitas dimidium ejus. In senario quaternarius cum*  
*bina-*



binario ejus semisse. Qui tertiâ rursus parte minorem superant sesquitercii appellantur, ut quaternarius ternarii. Qui quartâ, vocantur sesquiquarti, ut 5. sesquiquartus est numeri 4. & denarius octonarii, & progrediendo pariter, sesquiquinti, sesquisepti & sesquiseptimi appellati sunt omnes hi superparticulares. Et paulo post. Τῶν δὲ ἐπιμορίων λόγων πρῶτος καὶ μέγιστος, ὁ ἡμίσιος, ὅτι δὴ καὶ τὸ ἥμισυ μέρος πρῶτον καὶ μέγιστον καὶ ἐχέτω τῷ ὅλῳ. μετὰ δὲ τῶν ὀπίσθεν, καὶ ἐξ ἧς ὀπίσθεν, καὶ οὕτω πάλιν ἐπ' ἀπειρον ἢ πρόοδος αἰεὶ ἐπ' ἐλάττωτος. Superparticularium verò rationum prima & maxima est sesquialtera, quia pars dimidia prima & maxima est, totiq; proxima. sequitur illam sesquitercia, deinde sesquiquarta, idemq; est in infinitum decrescendo progressus. Quomodo autem ratio sesquialtera major sit ratione sesquitercia, & hæc major quam sesquiquarta, in sequentibus explicabimus, ubi de majore & minore ratione erit agendum. Nunc tantum illud proponere volumus, quod ad explicationem rationis ἐπιμορίος pertinet. Si ergo vel magnitudo magnitudinem, vel numerus numerum, vel pondus pondus ita excedat, ut major quantitas totam minorem in se contineat, & partem præterea ejus quamcunq; unam, major quantitas minoris ἐπιμορίος dicitur. Sic magnitudo 100. pedum magnitudinis 99. pedum ἐπιμορίος est, & nu-

Y 2

merus

merus 100. numeri 99. ἐπιμόλιος deniq; pondus 100. librar. ponderis 99. librarum est ἐπιμόλιον. Pro diversitate vero partium, diversitas etiam rationum consideratur. Etenim si magnitudo quædam aliam magnitudinem totam in se contineat, & partem præterea ipsius dimidiam, major magnitudo minoris dicitur sesquialtera. Sic magnitudo 150. pedum magnitudinis 100. pedum est sesquialtera: & magnitudo 30. pedum sesquialtera magnitudinis viginti pedum, atq; sic in infinitum. Atq; hoc ipsum in numeris obtinet. Etenim 150. ad 100. eandem habent rationem quam 3. ad 2. hoc est rationem sesquialteram. Quod etiam in ponderibus eodem plane modo se habere deprehenditur. Si vero major terminus minorem terminum totum in se contineat & partem præterea ipsius tertiam, major magnitudo minoris sesquitertia dicitur, & ratio ipsa sesquitertia. Sic ratio 1001. ad 1000. est sesquimillesima. continet enim in se totum numerum & partem præterea ipsius millesimam: eodem modo quo Cicero in libro de universo sesquitertia & sesquioctava vocatur illa ratio quæ Platoni in Timæo ἐπίτριτος & ἐπογδοος dicitur, qua de re in sequentibus data occasione plenius agetur. Particula igitur sesqui apposita indicat magnitudinem alterius magnitudinis esse ἐπιμόλιον, seu superparticularem. Sic enim ratio sesquitertia apud Ciceronem est  $\frac{4}{3}$  seu ἐπίτριτος



τριῶς Platonis : ratio sesquioctava est ἐπεγδοος Pla-  
 tonis seu  $\frac{2}{3}$ . Excedit autem quaternarius ternarium,  
 una ternarii parte. & novenarius octonarium una par-  
 te octonarii. Et sic 1001. est sesquimillesimus 1000.  
 excedit enim 1001. 1000. una parte millesima Scio  
 alios aliter loqui & per sesquimillesimum intelligere  
 numerum 1500. Sed qui accurate & cum veteribus, imo  
 cum Cicerone latine loqui & scribere velit, eam rati-  
 onem sequatur oportet, quam nunc explicuimus. Id  
 vero heic una notandum erit, quod in rationibus dig-  
 noscendis, semper sit recurrendum ad minimos & pri-  
 mos numeros, qui Græcis πυθμένες dicuntur. Sic  
 est πυθμὴν magnitudinis & rationis sesquialtera,  $\frac{2}{3}$  est  
 πυθμὴν sesquitertia,  $\frac{3}{4}$  sesquiquarta, & sic in infini-  
 tum, de quibus hoc notat Nicomachus Gerasenus libr. I.  
 Arithmetices Ὅτι οἱ μὲν πρῶτοι καὶ πυθμένες λεγόμενοι  
 ἐχέουσιν ἰσὺν ἀλλήλων ἐν τῷ φυσικῷ χέματι, οἱ δὲ δεύτεροι ἀπὸ  
 πυθμένων ἕνα μόνον ἀριθμὸν διαλείπουσιν, οἱ δὲ τρίτοι δύο, οἱ δὲ  
 τέταρτοι τρεῖς, καὶ οἱ πέμπτοι δ', καὶ αἰεὶ οὕτως μέχρις οὗ βού-  
 λει. Ἐν γὰρ μὴν τὸ μέγιστον οὗ πάρωνυμός ἐστιν ἕκαστος τῶν ἐπι-  
 μορίων, ἐν τοῖς ἡπιοῖσι θεωρεῖται τῶν πυθμένων, ἐν δὲ τοῖς μέεζοσι  
 ὀδαμῶς. *Quod ( in ratione ἐπιμορίω, ) primi quidem*  
*numeri, & qui πυθμένες Græcis dicuntur ( quod sint*  
*instar fundi reliquorum ) vicini sint invicem juxta*

*naturalem progressum. Qui vero secundi à πρῶτοις sunt, uno numero distant; tertii vero duobus: quarti, tribus: & quinti quatuor, & sic in perpetuum, quoad usq; progredi volueris. Præterea pars ista, unde quævis superparticularium denominationem habet, in minoribus πρῶτων seu fundamentalium consideratur, non vero in majoribus. Πρῶτες ergo, rationis sesquialteræ, sesquitertiæ, sesquiquartæ &c. sunt  $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}$  & sic in infinitum. His vero proximi numeri sunt  $\frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{11}{12}$ . Terti autem sunt  $\frac{2}{3}, \frac{12}{9}, \frac{15}{12}, \frac{18}{15}$ . Porro quarti sunt  $\frac{12}{8}, \frac{16}{12}, \frac{20}{16}$  &c. Primii autem sunt vicini & connexi. connectuntur enim binarius & ternarius, quaternarius & quinarium, senarius & septenarius immediate. Secundis autem unus numerus interponitur: inter quaternarium enim & senarium est quinarium, inter 6. & 8. est 7. inter 10. & 12. est 11. Tertii autem duobus numeris separantur. Inter senarium enim & novenarium, duo numeri sunt, septenarius & octonarius. Inter novenarium & duodenarium, denarius & undenarius. Deniq; inter quartos numeros tres alii dantur, ut inter 8. & 12. dantur 9. 10. 11. & sic in infinitum. Tantum de epimoriis seu superparticularibus.*

*Hiscæ vero inter rationes defectûs opponuntur ὑπερπρόγιοι, subsuperparticulares, quando nempe consequens continet in se totum antecedentem semel & unam præterea ipsius partem. Estq; totupla quot super-*



superparticularis. Vel enim subsesquialtera est, quando nempe consequens terminus antecedentis sesquialter fuerit, ut in numeris  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{5}{3}$  &c. vel subsesquitercia ut  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{6}{8}$ ,  $\frac{12}{16}$ , vel subsesquiquarta ut  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{8}{10}$ ,  $\frac{12}{15}$  atq; ita in infinitum. Πυθμένες vero, seu primi numeri harum rationum sunt.  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{5}{6}$  & quotquot in infinitum seipsos unitate superant; hoc est, ut consequens is qui Græcis ὑπολόγος dicitur, unitate excedat antecedentem seu τὸν προλόγον. Multa in hac rem ex Nicomacho Geraseno, aut Theone Smyrneo in medium adferre superuacuum arbitror, cum res ipsa satis per se clara sit.

## CAP. IIII.

Quando autem antecedens, totum quidē consequentem semel tantum in se habet, eundem vero pluribus partibus excedit, ratio ἐπιμερής dicitur Latinis superpartiens. In nūeris enim  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{7}{2}$  antecedens comprehendit in se totum consequentem, & partes præterea ejusdem, vel duas, vel tres. Id ipsum in cognitis atque effabilibus magnitudinibus & ponderibus locum habet. Magnitudo enim C. pedum ad magnitudinem LX. pedum rationem habet, quam quinq; ad tria, hoc est superpartientē. Continet enim major magnitudo in se totam minorem, & duas præterea ipsius partes tertias. hoc est, si minor magnitudo in tres æquales partes secetur, tum major, tales quinq; partes habebit, quales minor habet tres. Si enim LX. pedum magnitudo  
in

in tres partes dividatur, cuius parti convenient pedes XX. Sed quinqvies XX. faciūt centū, ergo centū quinq; tertias partes alterius habebit. Nicomachus Gerasenus lib. I. Arithmetices. Ἐπὶ δὲ ἐπιμερὲς μὲν ἀρίθμους ἢ συγκεινόμενον ἔχει ἐν ἑαυτῷ ὅλον, καὶ προσέτι μέρη αὐτῶ πλείονα ενός. Τα δὲ πλείονα ενός ἀρχαίαι πάλιν ἀπὸ τῶ δύο καὶ προέεισιν ἐπὶ πάντας τὰς ἐφεξῆς ἀριθμούς, ὥς τε τῶ ἐπιμερῶς πυθμὴν ὅστιν εὐκρίτως ὁ παρὰ τῶ ὅλῳ δύο μέρη τῶ ἀντισυγκεινομένου ἔχων καὶ κλητήσιν ἐπιδιμερὲς εἰδικῶς. Μετὰ δὲ τῶτον ὁ τῆς παρὰ τῶ ὅλῳ ἔχων κληθήσεται ἐπιτρίμερης (male in edito legitur ἐπιμερὲς) εἰδικῶς, καὶ μετὰ τῶτον ἐπιτετραμερὲς, εἴτα ἐπιπενταμερὲς καὶ οὕτως αἰεὶ. Τὰ δὲ μέρη εἰζαν ἔχει καὶ ἀρχὴν ἀπὸ τῶ τρίτου. ἀδύνατον γὰρ ἐνθάδε ἀπὸ τῶ ἡμίσι ἀρχεῖν, ἀνευ γὰρ καὶ τινος ὑποθέμενα δύο ἡμίσι ἔχειν τῶ ἀντιθέτου παρὰ τῶ ὅλῳ, λήσομεν ἑαυτὰς πολλαπλάσιον ἀντὶ ἐπιμερῶς πηθεύειν. Ἐχαστον γὰρ ὅλον καὶ δύο ἡμίσι αὐτὸν συνπθέμενα διπλάσιον γίνεσθαι τῶ ἐξ ἀρχῆς. *Est vero ratio superpartiens, quando numerus totum illum, cui comparatur in seipso habet, & præterea partes ipsius unâ plures. Partes vero istæ unâ plures, incipiunt à binario, atq; inde procedunt ad omnes sequentes numeros. Fundum ergo rationis superpartientis est numerus, qui præter totum eum quicum comparatur duas ipsius partes habet, & speciatim superbipartiens appellatur. Post hunc*



*hunc vero is, qui præter totum tria habuerit, vocatur speciatim supertripartiens, & post illum superquadrupartiens, inde superquinquepartiens, & sic porro in cæteris. Partes autem radicem & principium habent à ternario. Impossibile enim est in his à dimidio incipere; nisi unà aliquem numerum supponamus, qui præter totum oppositum numerum, duas præterea partes ipsius dimidias contineat. Sed tum quidem pro superpartiente multiplum ponemus. Totum enim compositum, una cum binis sui partibus dimidiis, dat sui ipsius duplum. Prima ergo & omnium simplicissima ratio ἐπιμερής seu superpartiens est, ad 3. Excedit enim quaternarius ternarium binis partibus tertii ternarii. Quaternarius enim excedit quidem binariū binis partibus, sed ita ut partes illæ ipsius binarii sint dimidiæ, adeoque 4. multiplus est binarii, nempe duplus. Distinguitur autem multipla ratio à superpartiente. Quæ ergo duabus, tribus, quatuorve partibus, pluribusve in infinitum aliam excedit magnitudinem, neque tamen eandem pluries in se continet quam semel, neque superparticularis est, rationem generat superpartientem. Sic ratio 7. ad 4. est superpartiens, & 8. ad 5. etiam superpartiens. Quæ pluribus persequi, operæ precium non arbitror.*

*Opponitur autem rationi superpartienti illa, cui præponitur particula sub, nempe subsuperpartiens ὑπεριμερής. estque quando consequens antecedentem*

Z

tem

tem totum in se semel continet, & partes præterea ipsius plures una. Sic 4. ad 7. est subsuperpartiens & 5. ad 8. Atq; sic in aliis.

Quando autem antecedens totum minorem aliquoties in se continet, & unam præterea ipsius partem, ratio *πολλαπλασιεπιμέριος* appellatur latinè multiplexsuperparticularis: cujus quidem rationis variæ species, tam respectu multipli, quam superparticularis. Et enim si bis in se contineat oppositū totū, pars vero excedens fuerit dimidia; ratio vocatur duplasq; vialtera: si pars tertia, duplasq; vitertia: & sic duplasq; viquarta, duplasq; viquinta, duplasq; vioctava, & sic in infinitum. Si multipulum, triplum fuerit; oriuntur rationes pro partium mutatione, triplosq; vialtera, triplosq; vitertia, triplosq; viquarta, triplosq; vimillesima. Sic ratio 8001. ad 1000. est octuplosq; vimillesima. Sic ratio 925. ad 124. est noncuplosq; vicientesima. Atq; juxta hanc rationem in aliis omnibus. Si enim consequens totum antecedentem sæpius in se contineat, & unam præterea quamcunq; ipsius partem, oritur ratio submultiplo particularis, ut ratio 1000. ad 8001. suboctuplosq; vimillesima, & sic in cæteris, subduplosq; vialtera, subduplosq; vitertia, subduplosq; viquarta. Tum subtriplosq; vialtera, ut 2. ad 7. subtriplosq; vitertia 3. ad 10., & sic in aliis. Quod si antecedens totum consequens in se contineat, & partes præterea ipsius una plures; ratio



tio vocatur ἐπιμερὴς & opposita huic συν τῇ ὑπὸ προθέσει  
vocatur ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς Latine multiplexsu-  
perpartiens, & submultiplexsuperpartiens. Sic ratio 18.  
ad 5. est triplasupertripartiens, 17. ad 5. triplasuper-  
bipartiens: ratio autem 5. ad 18. est subtriplasupertri-  
partiens, & 5. ad 17. subtriplasuperbipartiens.

Omnium ergo rationum excessus, quinque sunt  
species effabiles, & defectus totidem, Multipla, su-  
perparticularis, superpartiens, multiplasuperparticu-  
laris, multiplasuperpartiens. Effabiles quoque ratio-  
nes defectus totidem classes constituunt, apponendo  
prioribus particulam sub. Submultipla, subsuperpar-  
ticularis, subsuperpartiens, submultiplasuperparticu-  
laris, submultiplasuperpartiens. Quæ quidem in nu-  
meris accuratius perspiciuntur. XII. enim ad 2. habet  
rationem sextuplam, ad 3. quadruplam, ad 4. triplam,  
ad 6. duplam: quæ omnes rationes sunt multiplæ. in-  
versæ autem harum submultiplæ, nempe, binarii ad  
12. subsextupla; ternarii ad 12. subquadrupla; 4. ad  
12. subtripla; 6. ad 12. subdupla. Rursum 12. ad  
8. habet rationem sesquialteram, ad 9. sesquitertiam,  
ad 10. sesquisextam, ad 11. sesquiduodecimam, quæ  
omnes rationes sunt superparticulares, & his oppositæ  
συν τῇ ὑπὸ προθέσει cum præpositione vocis ὑπὸ  
seu sub (ut verbis Nicomachi Geraseni utar) ὑπερπαραμέτρους  
seu subsuperparticulares, nempe 8. ad 12. subse-  
quialtera Græce ὑφ' ἡμιόλιος 9. ad 22. subsesquitertia,  
Z 2 Græ-

Græce ὑπεπίτετς, 10. ad 12. ὑπέφειτς subsesquifexta, & deniq; ὑπεπιδωδεχάτς, subsesquiduodecima 11. ad 12.

Porro 12. ad 7. habet rationē superpartientē, nempe illam quæ Græce vocatur ἐπιπενταμερής, Latine superquinquepartiens, ratio vero 7. ad 12. est subsuperpartiens ὑπεπιμερής, nempe ὑπεπίπεμπς. Porro 11. ad 2. est qvintuplasfesqvi altera & 2. ad 11. subqvintuplasfesqvi altera. rursum 11. ad 5. est duplasfesqvi sexta, & 5. ad 11. subduplasfesqvi sexta. Quæ sunt rationes πολλαπλασιεπιμέροι & ὑποπολλαπλασιεπιμέροι multiplexsuperparticulares & submultiplexsuperparticulares.

Deniq; 11. ad 5. est ratio duplasuperbipartiens, 11. ad 3. ratio triplasuperbipartiens, 11. ad 4. duplasupertripartiens: & inversa harum eadem nomina retinent σὺν τῇ ὑπὸ ἀποθέσει præponendo particulam sub.

Atq; hoc quod in numeris explicatum est, in magnitudinibus effabilibus eodem modo consideratur. Ratio enim effabilis in magnitudinibus est, ut numerus ad numerum, sicut Euclidi demonstratum est libro X. Elem. Propos. V. VI. VII. Quæ vero rationes numeris explicari nequeunt, generaliter quidem ineffabiles appellantur: suntq; vel majores ratione æqualitatis, vel eadem minores. Si majores fuerint ratione æqualitatis, adeoq; antecedens consequens excedat,



cedat, λόγος ὑπεροχῆς ratio excessus dicitur: cui contraria est ratio defectus, quæ ratione æqualitatis minor est, quando nempe antecedens minus est consequente. Verum quidem est, omnes illas quas antea recensuimus rationes, quæ quidem æqualitatis non sint, necessario vel excessus esse, vel defectus. Sed quoniam singula earum specialia habent nomina, hæ inefabiles, cum singulari nomine careant, generali denominantur. Quod vero rationes excessus rationibus æqualitatis vere dicantur majores; & rationes defectus hisdem minores: postea diductius demonstrabimus.

## CAP. V.

Atque hætenus quidem rationes juxta primam ipsarum generationem consideravimus: nunc vero ulterius progrediendum, & affectiones ipsarum paulo accuratius inspiciendæ. Primum ergo, quod considerandum occurrit, hoc est: quod aliæ rationes sint simplices, aliæ compositæ. Simplices vel absolute, tales sunt, vel respectivæ. Simplices absolute, quæ omnis compositionis sunt expertes. Simplices vero respectivæ, seu secundum quid, quæ aliarum rationum respectu, quæ ex his componuntur, simplices appellantur. Absolute ergo simplices solæ rationes æqualitatis sunt, nullam enim compositionem agnoscunt: omnes enim rationes æqualitatis habent rationem, ut 1. ad 1. Ut vero intelligatur quid sit com-

Z 3

posi-

positio rationum , de ipsa compositione pauca dicemus.

Compositio est, quando duæ res ita inter se junguntur, ut unam rem faciant majorem prioribus singulatim sumptis, simul vero sumptis æqualem. Huic autem opponitur divisio. Dixi compositum majus esse quavis parte componente sigillatim sumptâ. Et enim cum duæ res separatæ antea, invicem junctæ totum aliquod efficiant; utiq; res illæ quæ junguntur partes erunt componentes. Totum autem erit compositum. Est autem totum majus singulis suis partibus. Fit autem compositio, vel per additionem, vel per multiplicationem: sicut divisio per subtractionem vel divisionem.

Quando enim linea 6. pedum adjicitur lineæ 6. pedum, totum est 12. pedum. Sic linea 5. pedum composita cum linea 13. pedum, hoc est adjecta lineæ 13. pedum, dat lineam 18. pedum. Idipsum in aliis quoq; magnitudinibus, tam effabilibus, quam ineffabilibus, tum quoq; in numeris omnis generis, omnibusq; ponderibus verumprehenditur.

Alia autem compositio fit per multiplicationem, quando numerus in numerum, magnitudo in magnitudinem; & pondus deniq; in pondus ducitur. Sic duodenarius componitur ex senario ducto in binariû, vel quaternario ducto in ternarium: Octonarius ex quaternario ducto in binarium. Sic rectangulum parallelogrammum ABCD componitur ex linea AB  
& BC



& BC in se ductis. Omnis enim linearum rectarum multiplicatio dat compositum, parallelogramum rectangulum. Quibus probè ac diligenter observatis, videndum porro est, qvalem compositionem rationes admittant.

Diximus vero antea omnem rationem duos habere terminos, antecedentem & consequentem. Si ergo rationes erunt componendæ, tum termini ipsi coniungendi, idq; vel per additionem, vel per multiplicationem.

Termini autem qvi coniunguntur vel ejusdem rationis sunt, vel diversarum.

Ejusdem rationis, qvando antecedens cujusdam rationis, compositus cum consequente ejusdem rationis, dat alterius rationis antecedens. Euclides his verbis definit. Σύνθεσις λόγος ἐστὶ λήψις τῶν ἡγούμενων μετὰ τῶν ἐπομένων ὡς ἐνός, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον. *Compositio rationis est sumptio antecedentis una cum consequente ad idem consequens.* Sic ratio 9. pedum ad 3. pedes erit composita ratio ex 6. pedum ad 3. pedes. Sic ratio 7. ad 2., hoc modo dicitur composita ex ratione 5. ad 2. Huic autem opponitur apud Euclidem divisio rationis, qvæ his verbis definitur. Διάρρησις δὲ λόγος ἐστὶ λήψις τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὑπέρεχει τὸ ἡγούμενον τῶν ἐπομένων πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον. *Divisio autem rationis est sumptio excessus, quo antecedens excedit consequens, ad idem consequens.* Observandum vero est beneficio hujus com-

compositionis continuatæ, omnes rationes multiplas generari incipiendo ab æqualitate. Si enim  $\frac{1}{1}$  antecedens junctum consequenti, conferatur cum consequente; erit ratio  $\frac{2}{1}$  dupla. Si rursus antecedens junctum consequenti conferatur cum eodem consequente; oritur ratio  $\frac{3}{1}$  tripla. Rursus hoc antecedens junctum consequenti; dat rationem  $\frac{4}{1}$  quadruplam: & sic in infinitum. Adeoq; hoc modo ratio  $\frac{4}{1}$  quadrupla componitur ex ratione æqualitatis & ratione tripla: & ratio tripla, ex ratione æqualitatis & ratione dupla: deniq; ratio dupla, ex ratione æqualitatis hoc modo composita. Quod naturæ rerum apprime convenit. Equidem alii ut hanc compositionem melius demonstrarent, alium introduxerunt modum compositionis per additionem. Cum enim observarent, si rationes æquales adderentur, ita ut antecedens antecedenti, & consequens consequenti conjungeretur; tum non majorem, nec aliam auctioremve rationem generari, sed eandem plane cum priori: tantum antecedentes terminos conjunxerunt, eodem consequente retento. Etenim si  $\frac{1}{1}$  addantur, ita ut antecedens antecedenti, & consequens consequenti jungantur, oritur ratio  $\frac{2}{2}$  quæ est æqualis  $\frac{1}{1}$  rationi. Sic si  $\frac{3}{2}$  addantur eo modo, oritur ratio  $\frac{6}{4}$  quæ eadem est cum ratione  $\frac{3}{2}$ . Quamvis enim & antecedens terminus, & consequens rationis  $\frac{6}{4}$  excedant terminos rationis  $\frac{3}{2}$  quilibet, quemlibet, ratio tamen est eadem. Ratio enim  $\frac{3}{2}$  est sesquialtera, sicut &  $\frac{6}{4}$  est sesquialtera,



tera, & ut se habent tria ad duo, sic se habent 6. ad 4.  
 Hoc est ut se habent sex pondo ad 4. pondo, sic se habent 3. pondo ad duo pondo. Et ut centum ulnæ panni ad 30. homines vestiendos sic se habent 50. ulnæ ad 15. homines vestiendos. Ratio est eadem, nempe dupla; quamvis termini utrinque majores. Hoc itaque cum Geometræ & Mathematici animadverterent, facile considerarunt rationes per additionem terminorum utrinque componi non posse. Quoniam vero viderent, in plurimis rebus, hanc rationum compositionem, quæ additione peragitur, magnum usum habere: hoc modo eandem perfecere. Diverfarum enim rationum antecedentes terminos invicem additione conjunctos cum eodem consequente compararunt, adeoque certo modo compositam rationem habuere. Quamvis si accurate loqui velimus, hæc compositio non est integrarum rationum; sed tantum duorum terminorum: nempe vel ejusdem rationis, ut in compositione, quæ juxta Euclidis mentem recensuimus: vel antecedentium tantum terminorum diverfarum rationum. Et si posteriori quidem modo compositio fiat, tunc rationes multiplicas easdem habebimus quas prius. Componatur enim ratio  $\frac{1}{1}$   $\frac{1}{1}$  datur ratio  $\frac{2}{1}$ . Antecedentia enim duæ unitates compositæ, dant duo: quæ collata cum unitate eodem consequente, dant rationem duplam. Porro hæc rursum composita cum ratione æqualitatis, dat rationem triplicam  $\frac{1}{1}$   $\frac{2}{1}$ . Etenim duo & unum dant tria consequens, autem idem est: ratio ergo est  $\frac{3}{1}$ . Si rursum hæc ratio

A a

cum

cum ratione æqualitatis componatur, oritur ratio quadrupla. & sic quintupla, sextupla atq; in infinitum. In his vero omnibus rationibus, idem obtinetur methodo Euclidis, si nempe antecedens junctum consequenti cum eodem consequente comparetur, ut antea indicatum fuit. Si vero rationes alias eodem modo investigare aut componere aliquis voluerit, id quidem posteriori methodo facillime fit. Ita enim ratio sesquialtera componitur ex ratione æqualitatis, quæ integrum seu totum repræsentat, & ratione dimidia.  $\frac{2}{1}$  dat  $\frac{3}{2}$ . Ratio enim duo ad duo est æqualitatis,  $\frac{1}{2}$  est subdupla, composita dat  $\frac{3}{2}$ . Sic ratio quintupla componitur ex ratione dupla & tripla  $\frac{2}{1}$  &  $\frac{3}{1}$  dant  $\frac{5}{1}$ . Habet vero hæc rationum compositio magnum in Mechanicis usum, imo in omni vitæ genere. Sit enim v.g. lacus aliquis forma rectangulari oblongâ aquis plenus, cujus longitudo sit pedum 500., latitudo 50. & profunditas 8 pedum. Aquæ ergo omnes lacus facient pedes cubicos 200000. Longitudo enim ducta in latitudinem, dat superficiem 25000 pedum quadratorum, in quam ducta profunditas, dat totum corpus vel molemaqueam 200000. pedum cubicorum. Locum vero quam celerrime evacuaturn velim. Habeo autem rotam decem concavitatum seu camerarum, quarum singulæ pedem unum cubicum exhauriunt, ipsa autem rota totaq; ipsius peripheria uno minuto horario unam facit circumgyrationem. Locum autem purgatum optarem spatium unius diei, vel etiam breviori,



viori, si fieri posset. Applico præter priorem rotam alias tres, quarum singulæ decem quoq; habeant concavitates, sed triplo capaciores, ita ut singulæ tres pedes cubicos exhauriant: habeo præterea ad manum duas adhuc alias rotas quindecim cameris instructas, quarum singulæ exhauriunt duos pedes cubicos aquæ. Appositis ergo omnibus sex rotis erit ratio unius cameræ primæ rotæ ad totam aquarum molem,  $\frac{1}{20000}$ . adeoq; totius rotæ  $\frac{10}{200000}$  seu  $\frac{1}{20000}$ . Ratio porro alterius rotæ est ad totam aquarum molem  $\frac{2}{200000}$ . Etenim cuiusvis cameræ ratio est  $\frac{3}{200000}$ . adeoque decem cavitatum erit  $\frac{30}{200000}$  seu ut supra. Tres autem rotæ eodem modo sunt constructæ, eandemque singulæ capacitem habent. unde ratio earum est eadem. Denique rota quindecim cavitatum habet rationem ad totam aquarum molem  $\frac{30}{200000}$ . seu  $\frac{3}{20000}$  quævis enim cavitas capit 2. pedes cubicos, adeoque ratio cuiusq; cavitatis ad totam aquarum molem est  $\frac{2}{200000}$  seu  $\frac{1}{100000}$ . unde 15. cavitatum erit  $\frac{15}{100000}$  seu retento eodem consequente  $\frac{3}{20000}$ . His ergo omnibus rationibus invicem compositis dabitur evacuatio conveniēs uni minuto horario, unde cognoscetur evacuatio unius horæ, adeoq; quanto tempore tota evacuatio contingat. Reductæ autem omnes rationes ad eundem terminum consequentem, habebunt se omnia juxta priora, posita cuiusvis minuti evacuatione ut prius.

$$\frac{1}{20000} \quad \frac{2}{20000} \quad \frac{3}{20000} \quad \frac{3}{20000} \quad \frac{3}{20000} \quad \frac{3}{20000} \quad \frac{3}{20000}$$

A a 2 compo-

Compositæ vero hæ rationes, dant rationem omnium rotarum ad totam aquarum molem singulis minutis  $\frac{16}{20000}$  seu  $\frac{1}{1250}$ . Una ergo hora dabit 60 circumgyrationes, eritque ratio  $\frac{60}{1250}$  seu  $\frac{6}{125}$ . Horis ergo 20. & 50'. totus lacus evacuabitur. In his ergo aliisq; plurimis exemplis hujus generis, hæ rationis compositio locum habet. Si enim tum per multiplicationem progredi vellem, nihil efficerem. Hoc ergo modo ex ratione  $\frac{2}{1}$  &  $\frac{3}{1}$  composita dici potest ratio quintupla, quamvis compositio hæc valde sit imperfecta, ut antea indicatum: cum non totæ rationes, sed tantum termini earum antecedentes componantur.

Integra autem & perfecta compositio rationum est, quando duarum rationum excessus ambo termini antecedens cum antecedente, & consequens cum consequente invicem conjunguntur. Talem vero compositionem additione fieri non posse, Geometræ statim deprehenderunt. Etenim cum omnis compositio, rem compositam auctiorem & majorem reddere debeat, quam antea fuit: ergo cum id additione amborum terminorum invicem non semper fiat; sed in omnibus quidem æqualibus rationibus totum sit æquale singulis partium unde componitur, in aliis vero aliquando minus: sequitur talem additionem compositionem appellari non debere. Si enim rationem triplam cum tripla ratione per additionem antecedentium invicem, & consequentium invicem componere voluerim, ratio erit tripla. Habcat enim in figura



gura No. 2. AB. ad CD. rationem triplam; EF. ad GH. rationem triplam, dico, si AB. jungatur ipsi EF. & CD ipsi GH. tum totam ABEF. ad totam CDGH. habere rationem triplam. Si enim AB. fuerit 6. pedum, CD. erit 2. pedum. & si EF. fuerit 9. pedum GH. erit 3. pedum. Jungantur AB. & EF. tota AB EF. erit pedum 15. jungantur EFGH. tota EFGH. erit pedum 5. At 15. est triplum 5., sicut 9. est triplum 3., & 6. triplum binarii. unde ratio ubique eadem, nempe tripla. Quod si ratio minor ratione æqualitatis componatur: hoc modo cum ratione quacunque excessus, tum totum minus erit sua parte. ut si ratio  $\frac{3}{1}$  seu  $\frac{6}{2}$  componatur cum ratione  $\frac{1}{2}$  prodit ratio  $\frac{7}{4}$ . At ratio  $\frac{12}{4}$  seu  $\frac{3}{1}$  est major ratione  $\frac{7}{4}$ . Liquet ergo ex his, rationes per additionem amborum terminorum antecedentium invicem & consequentium invicem componi non posse, neque illam compositionem ullo modo esse legitimam, sed potius divisionem aliquam esse, de quibus in sequentibus. Scio quidem Aristotelem Rhetoricorum lib. III. c. VIII. hujus compositionis aliquam fecisse mentionem. Verba quatenus huc spectant adscribam, Τῶν δὲ ρυθμῶν ὁ μὲν ἥρωος Ἰεμνὸς καὶ λεκλικὸς καὶ ἀρμονίας δεόμενος. ὁ δὲ ἰαμβὸς αὐτὴ δὲ ὅστις ἡ λέξις ἢ τῶν πολλῶν. ὁ δὲ ἱοχαῖος κορδακι κότερος. λείπειαι δὲ παιανῶν ἐχρῶντο μὲν ἀπὸ Θρασυμάχου ἀρξάμενοι, ὅτι εἶχον δὲ λέγειν ἡς ἦν. Ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ παιανὸς καὶ ἐχόμενος τῶν εἰρημένων. τῆς γὰρ πρὸς δύο ὅστις. Ἐκείνων δὲ, ὁ μὲν ἐν πρὸς ἓν, ὁ δὲ δύο πρὸς ἓν.

Aa 3

"Εχ-

Ἐχέτω δὲ πῶν λόγων τῶν ὁ ἡμιόλιος. Ἔτος δὲ ὅτι ὁ παῖς.  
*Errhythmis vero Herous grandis & dictioni accommodatus & Harmonia indigens. Jambus vero ipsa est elocutio multitudinis Trochæus autem magis saltationi conveniens. Relinquitur Pæan, quo usi sunt incipientes à Thrasy-macho. Non potuerunt vero dicere quinam esset. Tertius autem est Pæan, & continet jam dictos. Est enim ut tria ad duo illorum autem unus est, ut 1. ad 1., auter ut duo ad unum. Has vero rationes continet sesquialtera, quæ est Pæan. Porro indicat, de quo Pæane verba faciat. duos enim Pæanes contrarios dicit. Unus enim est ὁ ἀρχὴ μὲν ἡ μακρὰ, τελευτῶσι δὲ τρεῖς βραχεῖαι, ἕτερος δὲ ἐξ ἐναντίοις, & βραχεῖαι ἀρχῶσι τρεῖς, ἡ δὲ μακρὰ τελευτῶσα quæ incipit à longa, terminatur tribus brevibus (cujus signum in Poeticis est -vvv) alter vero ex contrariis incipit tribus quidem brevibus, una longa. (cujus signum est in Poeticis vvv-) Herous seu dactylus componitur ex una longa, duabus brevibus. una autem longa æquatur binis brevibus. ergo ratio dactyli est 2. ad 2. seu 1. ad 1. Jambus vero componitur ex brevi & longa v-, hoc est ex tribus brevibus, estq; ut unum ad duo. Trochæus autem ex longa & brevi, estq; duo ad unum. Unus ergo Pæan componitur ex dactylo & jambo, vel ut terminum Aristotelis retineamus, continet dactylum & jambum, seu rationem æqualitatis & subduplam  $1\frac{1}{2}$ , unde oritur ratio subsesquialtera. antecedentia enim adjecta consequentibus, dantrationē  $\frac{2}{3}$ . Alter vero Pæan, quem vulgo quartum vocant, continet*



net dactylum & Trochæum seu rationem  $\frac{1}{2}$  &  $\frac{2}{3}$  adeoque est ἡμίλιος. Adjecta enim antecedentia antecedentibus, & consequentia consequentibus dant rationem  $\frac{3}{2}$ . Nec tamen hæc terminorum conjunctio compositio appellatur Aristoteli, neque proprie loquendo compositio est. Etenim una partium est major toto: ratio nempe dupla est major ratione sesquialtera, adeoque trochæus major quam Pæan quartus: quod est perabsurdum. Unicus ergo modus componendi rationes totas perfectè, antecedentia nempe cum antecedentibus, & consequentia cum consequentibus, fit per multiplicationem, quando nempe antecedens cum antecedente, & consequens cum consequente multiplicatur, qui quidem quatenus ad lineas pertinet, ab Euclide propositus est libro VI. Elementorum propositione XXIII. ubi demonstrat æqviangula parallelogramma, rationem invicem habere ex lateribus conjunctâ. Nempe si datæ fuerint quæcunque rationes excessûs in lineis, siue effabiles, siue ineffabiles, parallelogrammum rectangulû ex antecedentibus terminis constructum, ad parallelogrammum rectangulum ex consequentibus terminis, habebit rationem compositam ex his binis rationibus.

Sint enim datæ duæ rationes excessûs AB. ad BC. & BD. ad BE. constituatur ex AB. & BD. antecedentibus terminis parallelogrammum rectangulum; & aliud ex consequentibus BC. & BE. Quoniam ergo hæc bi-

na

na parallelogramma sunt æquiangula, ergo habent rationem invicem conjunctam ex lateribus per XXIII. Propositionem. adeoq; erit ut AB. ad BC. & DB. ad BE. sic parallelogrammum AD. ad parallelogrammum CE. Neque sane aliter esse potest. Cum enim ambo termini utriusq; rationis invicem multiplicentur: ipsæ quoq; rationes invicem sunt multiplicatæ. omnis autem talis multiplicatio in rationibus excessus est compositio, ut antea dictum. Neque in rationibus alia compositio perfecta est, præter illam, quæ fit per multiplicationem. Duæ autem lineæ rectæ in se ductæ, hoc est multiplicatæ invicem generant parallelogrammum. Ergo parallelogramma æquiangula ex antecedentibus & consequentibus exstructa exhibent rationem compositam ex binis aliis rationibus.

Atq; hoc quidem in numeris non minus clarum perspicitur. Etenim si duæ rationes triplæ componantur invicem, oritur ratio noncupla ut  $\frac{3}{1} \frac{3}{1}$  dant  $\frac{9}{1}$ . Antecedentibus enim invicem, & consequentibus in se ductis oritur ratio  $\frac{9}{1}$ .

Liquet ergo eandem & in Geometricis & Arithmeticiis rationum compositionem esse. Sicut enim in Arithmeticiis ambo antecedentia in se ducta seu invicem multiplicata, dant antecedens compositæ rationis: & consequens similiter ductum in consequens, dat compositæ rationis consequens, ita etiam in Geometricis ambo antecedentia, seu ambæ antecedentes magnitudines, quæ certis lineis indicantur, in se ductæ dant par-



parrallelogrammum, quod quidem ad parallelogrammum ex binis quibuscunq; lineis, quæ consequentes terminos seu magnitudines repræsentant, constructum, rationem habet ex lateribus compositam.

Quoniam vero necessarium est, rationes hæc compositas non tantum in parallelogrammis; sed etiam in rectis lineis exhibere; methodum hujus rei in sequentibus proponam, eadem multiplicatione, per parallelogramma, semper retenta, ut benevolus lector pervideat, quã bene modus componendi rationes, tam Geometricè quam Arithmetice invicem conveniat.

Hanc vero compositionem rationum, quæ ita per antecedentium & consequentium terminorum mutua multiplicationem peragitur, omnino genuinam esse, atque in ipsa natura fundamentum habere, ex Harmonicis discimus. Cum enim Harmonia diatessaron ex quatuor tonis componatur, quorum primus ad secundum est in ratione sesquioctava, tertius vero ad quartum, ut 256. ad 243: ergo ratio quæ dat diatessaron, hoc est ratio sesquitertia, componitur ex hisce tribus rationibus  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  &  $\frac{2}{3}$ . Quod etiam hac compositione verum esse deprehenditur. Ratio enim  $\frac{2}{3}$  seu sesquioctava composita cum ratione sesquioctava, dat rationem  $\frac{8}{4}$ . Porro ratio  $\frac{2}{3}$  composita cum ratione  $\frac{8}{4}$ , dat rationem  $\frac{207}{153}$  seu  $\frac{4}{3}$  hoc est  $\frac{4}{3}$  sesquitertiam. Maximus enim communis divisor 5184. secatur antecedentem terminum 20736.

B b

in

in 4. partes & consequentem 15552. in tres. adeoque ratio 20736. ad 15552. est ratio sesquitertia, seu in minimis numeris  $\frac{3}{2}$ . At componitur ratio 20736. ad 15552. hoc est  $\frac{3}{2}$  ex ratione 81. ad 64. & 256. ad 243. ratio autem 81. ad 64. componitur ex binis sesquioctavis, adeoque ratio  $\frac{3}{2}$  seu sesquitertia, quæ dat harmoniam diatessaron componitur ex binis *ἐπογδοῖς* sesquioctavis & limmate, cujus ratio est, ut numerus ad numerum 256. ad 243. Hæc est illa harmonia universi, juxta quam omnium rerum compositio est ordinata, quam pulcherrimis verbis describit Plato in Timæo, & ex eo Cicero in libro de Universo, de qua re postea plenius, ubi de analogia speciatim erit agendum. Ita ergo hæc rationum compositio quæ fit per multiplicationem antecedentium terminorum inter se, & consequentium inter se, in ipsa natura fundamentum habet.

## CAP. VI.

Haftenus quidem compositionem rationum consideravimus: Sequitur divisio, quæ varia: non secus quam ipsa compositio. Etenim vel totalis divisio est, vel partialis. Totalis est, quando magnitudo à magnitudine, vel numerus à numero, vel denique pondus à pondere aufertur toties, quoties fieri potest, ita ut nihil remaneat. Partialis autem, quando semel tantum, ita ut aliquid remaneat. Prior *ἡ πρώτη* divisio dicitur, posterior subtractio. Sic  
 si mag.



si magnitudo 6. pedum auferatur à magnitudine 18. pedum semel, remanent 12. pedes. At si dividatur per 6 pedes, nihil quidem remanet non divisum, totum vero divisum est 3. pedum. In divisione ergo proprie sic dicta, tria veniunt notanda, dividendum, dividens & divisum. Ut in priori exemplo magnitudo 18. pedum est dividendum, magnitudo 6. pedum est dividens, & magnitudo 3. pedum est divisum, sive id quod fit ex divisione. Quod ipsum in numeris & ponderibus eodem modo se habet. Est autem divisio proprie dicta, vel perfecta, vel imperfecta. Perfecta, quando post divisionem nihil remanet non divisum. Imperfecta, quando post divisionem aliquid remanet non divisum. In priori exemplo, magnitudo 6. pedum ita dividit magnitudinem 18. pedum ut perfecta divisione nihil remaneat non divisum. Si vero diagonalis quadrati alicujus dividatur per latus alterius quadrati, quod prioris sit subsexdecuplum, adeoque basis baseos subquadrupla: erit quidem divisio illa in quinque partes, sed non perfecta. Dividit enim basis diagonalem istam in quinque partes, ita tamen ut aliquid remaneat non divisum, imo quod neque ullo modo dividi potest à basi, cum earum ratio mutua sit ineffabilis, quamvis potentia sit effabilis.

Quoniam vero hæc rationum divisio magno nobis usui postea sit: necessarium arbitror eam accuratius explicare, singulasque ipsius affectiones diligentius

B b 2

con-

considerare. Quod ut fiat, antea divisio omnium quantitatum considerata erit, tam in numeris, quam magnitudinibus ac ponderibus.

Dico ergo primum, divisionem esse duarum quantitatum homogenearum conjunctionem mutuam, ex qua alia fit quantitas, vel una priorum, vel utraque minor.

Per quantitates homogeneas intelligo numeros, cum numeris, lineas cum lineis, pondera cum ponderibus conjungi. Per conjunctionem vero intelligo multiplicationem. Nulla enim divisio sine multiplicatione. Si enim magnitudo 20. pedum per magnitudinem 4. pedum erit dividenda, utique minor quinquies multiplicanda, ut totum in quinque partes dividat. Quoniam vero in omnibus rationibus effabilibus, *quævis* semper fit totius ad partes, vel partis aut partium ad totum: utique divisio rationum effabilium ex divisione harum rerum optime intelligetur. Antea enim indicavimus omnes rationes effabiles, esse ut numerum ad numerum. Ratio autem numeri ad numerum est, ut tot partes unius integri, ad partes quotcunque alterius integri. Sic magnitudo 256. partium ad magnitudinem 243. partium habet rationem quam numerus ad numerum: hoc est ut 256. partes ad 243. partes. Atque id adeo in omnibus rationibus effabilibus verum est; ut nulla plane ratio sit effabilis, nisi quæ numero explicari possit. Ut ergo doctrinam divisionis rationum intelligamus, in partium



tium natura primum addiscenda erit. Atq; ut in  
 priori exemplo maneamus, sit magnitudo AB. in fi-  
 gu. num. 3. partium 256. talium, qualium magnitudo  
 CD. in eadem figura est partium 243. Ratio ergo  
 AB. ad CD. est 256. ad 243. Secetur AB. bifariam  
 in E. ratio ergo AE. ad AB. est 128. ad 256., seu  
 1. ad 2. Etenim AE. continet partes 128. tales, qua-  
 les AB habet 256. Est vero numerus 128. dimidius  
 numeri 256. Erit ergo ratio harum partium, ut 1. ad 2.  
 Ratio autem AE. ad CD. erit 128. ad 243. In mino-  
 ribus enim numeris non datur. magnitudo autem AE.  
 partes habet 128. tales, quales magnitudo CD. par-  
 tes habet 243. Secetur porro magnitudo CD. in tres  
 partes, & sit triens hujus CF. erit ergo ratio CF. ad  
 CD., ut 81. ad 243., seu 1. ad 3. Cum enim CF. sit  
 triens ipsius CD., ergo qualium CD. habet 243. par-  
 tes, talium CF. habebit 81. partes. ut si CD. esset  
 pedum 243. esset CF. triens hujus pedum 81. cum  
 81. sint tertia pars 243. Est ergo ratio CF. ad CD.  
 subtripla, seu  $\frac{1}{3}$ : vel retentis prioribus numeris ut 81. ad  
 243. Ad magnitudinem vero AB. esset ut 81. ad 256.  
 & ad magnitudinem AE. ut 81. ad 128. Si ergo mag-  
 nitudinem AE., quæ habet centum viginti octo du-  
 centesimas quinquagesimas sextas partes, ita divide-  
 re cuperem, ut divisum esset, sicut CF. ad CD. seu ha-  
 beret octuaginta unam ducentesimas quadragesimas  
 tertias partes: divido singulas partes ducentesimas  
 quinquagesimas sextas in partes ducentas quadraginta

B b 3

tres,

tres, hoc est multiplico 256. per 243. prodeunt 62208. Adeoque tota AB. habet sexagies bis mille ducentas & octo partes ducentasimas quadragesimas tertias: hoc est cum singulæ partes ducentasimæ quinquagesimæ sextæ ipsius AB. sectæ fuerint in partes ducentas quadraginta tres, erit tota AB. secta in partes tales 62208. Adeoque cum 256. partes secantur in 62208. partes, utique 128. secabuntur in 31104. ejusdem mensuræ partes. Ut autem partem habeamus, quæ sit ad 128. hoc est ad 31104. ut 81. ad 243. erit ut 243. ad 81. sic 31104. ad quartum quæsitum, seu ad 10368. Hoc est 10368. se habet ad 31104. seu 128. partes ducentasimas quinquagesimas sextas magnitudinis AB. ut 81. ad 243. Quæ quidem portio, etiam ex sola multiplicatione antecedentium cognoscitur. 81. ducta in 128. dant 10368. Eritque ratio partis hujus datæ, quæ ad 128. se habet, ut 81. ad 243., ad totam magnitudinem AB. seu 256., ut 10368. ad 62208. Adeoque magnitudo quæ prius eo modo divisa erat, ut pars ad totum esset ut 128. ad 256. nunc iterum secundum eandem partem ita divisa est, ut pars posterior ad priorem sit ut 81. ad 243. ad totum autem ut 10368. ad 62208. seu reductis numeris ad minima, ut 1. ad 6.

Idipsum pluribus exemplis illustrare velim, ut eo melius divisionis naturam perspiciamus. Sit magnitudo AB, alia magnitudo CD, quæ quidem si invicem debeant esse commensurabiles, tum CD. bifariam



am erit secunda. Continet enim AB totam in se CD. ter, & partem præterea ipsius dimidiam; hoc est, habet partes 7. tales, quales CD. habet duas. Optarem tota AB. bifariam secta in E. omnes tres magnitudines AB. AE. & CD. commensurabiles efficere, ita ut eadem mensura mensurari possent. Divido singulas partes septimas ipsius AB bifariam, hoc est, multiplico 7. per binarium, prodeunt 14. Adeoque tota AB. talium est 14, qualem AE. est 7. Divido quoque singulas partes ipsius CD. bifariam, hoc est multiplico duo per duo, prodeunt 4. Cum ergo AB. nunc sit 14. partium talium, qualem CD. est quatuor; erit AE. 7. talium, qualem CD. est quatuor. Atque hoc facillime ipsi rationum compositioni applicatur. Ratio enim AB. ad CD. est eadem quæ partium 7. ad 2. Ratio autem AE. ad AB est semissis ad integrum, hoc est 1. ad 2. Quæro rationem AE. ad CD. quam antea deprehendi esse, ut 7. partes ad quatuor partes. Divido rationem 7. ad 2. per rationem 1. ad 2. & quidem multiplicando antecedentia invicem; & consequentia invicem: prodit ratio 7. ad 4. Etenim in rationibus  $\frac{1}{2}$  &  $\frac{2}{2}$  semel septem sunt septem, bis bina quatuor: prodit ratio  $\frac{7}{4}$ . Dixi autem in omni divisione, divisum vel utroque terminorum singillatim sumpto minus esse, vel alterutro. Etenim si 20. dividantur per quatuor, divisum erit 5. At quinque minor quidem est dividendo, sed major divisore quaternario. Si vero 20. dividantur per 10, divisum erit duo: & tum divisum

sum minus est & dividendo, & divisore. Quod ipsum in rationum divisione locum habet. Si enim ratio excessus dividatur per rationem defectus, divisum minus quidem est ratione excessus, sed majus ratione defectus. Ut in antecedenti schemate, ratio 7. ad 4. est major quidem ratione  $\frac{1}{4}$ , sed minor ratione 7. ad 2. seu 14. ad 4. Verum de his plenius ubi ad rationes majores & minores ventum fuerit. Nunc tantum naturam divisionis indicasse volumus.

Verum pluribus hæc exemplis sunt illustranda. Sit magnitudo AB. 7. partium talium, qualium CD. sit 2. Secetur AB. in AF. ita ut tota AB. tres partes tales habeat, quales AE. majus segmentum habet duas, & minus BE. unam. Velim scire qua communi mensura majus segmentum & CD. magnitudo mensurantur. Seco totam in tres partes, & ut convenient invicem particulæ ipsius CD. & AB. secō singulas partes septimas AB. & singulas partes secundas CD. trifariam. adeoque tota AB. habet 21. partes tales, quales CD. habet 6. Majus ergo segmentum habebit 14. tales, quales AB. habet 21. hoc est quales CD. habet 6. Id autem ipsum brevissima methodo investigatur, multiplicando 2. per 7. & tria per duo. Nam & AB. tum debito modo secta est: & segmentum ejus factum est commensurabile ipsi CD. Est vero ratio AB. ad CD. ut partes 7. ad 2. ratio autem AE. ad AB. est ut duæ partes ad tres partes, seu ut 2. ad 3. Multiplicentur antecedentia cum antecedentibus, & consequentia cum



cum antecedentibus, & consequentia cum consequentibus, erit bis septena 14: ter bina 6. datur ergo ratio majoris segmenti ad CD. ut 14. partes ad 6. vel 7. ad 3.

Compositio ergo vera & perfecta rationum & earundem perfecta divisio, eodem plane modo fiunt per multiplicationem. Tantum inter ambas hoc discrimen est, quod tertium seu productum illic augeatur, majusque sit utraque rationum; heic vero minuatur: & vel utraque rationum minus sit, vel una. Et ne quis existimet hanc divisionem jure appellari non posse; demonstro, in divisionibus qua partes tota, juxta certam mensuram, vel partes partes secant, hanc eandem dividendi methodum locum habere. Si enim duæ septimæ partes alicujus magnitudinis in quatuor quinque partes sint secandæ, hoc est AE quæ habet duas partes tales, quales AB habet 7. secanda erit in singulis partibus, ita ut quævis pars secta se habeat ad quamvis partem secundam ipsius AE. vel septimam AB. ut CF. ad CD. hoc est ut quatuor ad quinque. Seco singulas partes in quinque. Adeoque tota AB. secta est in partes 35. tota autem AE in partes 10. Ut vero quatuor ad quinque, sic 8. ad decem. Adeoque octo decimæ partes ipsius AE. erunt octo tricesimæ quintæ partes ipsius AB. Id ipsum methodo superius tradita facillime investigatur. Partes enim sunt  $\frac{2}{3}$  &  $\frac{4}{5}$  quæ conjungantur invicem multiplicando superiora cum superioribus (Græci superiores numeros vo-

Cc

cant

cant  $\omega\epsilon\lambda\acute{o}\gamma\alpha\varsigma$  inferiores  $\upsilon\pi\omicron\lambda\acute{o}\gamma\alpha\varsigma$ ) prodit numerus  $\frac{2}{3}$ . Idipsum adeo in omnibus partium divisionibus contingit, quæ per alias partes dividuntur. Partem autem voco quicquid ab alio exceditur, vel una, vel pluribus partibus. sic  $\frac{1}{2}$   $\frac{2}{3}$   $\frac{3}{4}$  sunt partes.  $\frac{2}{3}$  autem partis partiumve nomine non veniunt: cum totum sit, continens in se tot partes tales alterius. In omnibus ergo magnitudinibus commensurabilibus partes dicuntur quando antecedens minus est consequente. Totum vero, quando antecedens majus est consequente. Ut ergo semel dicam, quando tota cum partibus, vel partes cum partibus hoc modo conjunguntur, divisio fieri dicitur. Etenim quod ex hac conjunctione fit, minus est vel uno vel alterutro terminorum. At compositionem id vocare, quando id quod fit, minus est eo ex quo fit, id vero perabsurdum est. Si enim res componuntur, augentur: & compositum erit totum; ea vero quæ componunt, partes. Totum autem majus esse partibus suis haud dubium.

Quando ergo ratio excessus conjungitur cum ratione defectus, ratio excessus per rationem defectus divisa est. & illa ratio quæ inde oritur, ratio diuisa appellatur, saltem ita appellari jure debet: quandoquidem semper minor sit quam ratio excessus primo loco posita. Eodem modo, quando ratio defectus cum ratione defectus per multiplicationem conjungitur, major ratio à minore diuiditur: & ea ratio quæ ex hac conjunctione oritur, minor est utraque, adeoque diuisum. Quod  
in



in sequentibus postea plenius demonstrabimus. Optime ergo Euclides, quando hanc conjunctionem rationum indicare voluit, semper usus est voce *συνκείσθαι* conjici aut conjungi; non vero *συντίθεσθαι*: quod alii forte Græci Mathematici non tam diligenter obseruauerint: quamvis & certo modo eorum vocabula explicari possint: qua de re pluribus postea dicendum. Quod si quis præfracte contenderit, etiam illam conjunctionem, compositionem esse dicendam, quæ fit inter rationes excessûs & defectûs, vel rationes defectus inuicem: non video quomodo compositionem à divisione sejunxerit. Etenim compositionem esse contrariam divisioni, vix quisquam negauerit. Neq; ullum arbitror dicturum, divisionem ullo modo posse appellari compositionem. At quando duæ magnitudines ita inuicem conjunguntur, ut unum productum faciant minus vel utraque earundem magnitudinum, vel una saltem: tum diuidit una magnitudo aliam eandemque imminuit, non vero auget. Diuisio ergo rationum ex divisione magnitudinum optime intelligitur, sicut & illarum compositio, ex harum compositione. Quoniam vero hæc accurate in rationibus demonstrari nequeunt, nisi antea rationes æquales & inæquales fuerint explicatæ: harum naturam jam paucis indicabimus, cum unum per aliud eo melius & facilius intelligatur.

## CAP. VII.

Æquales rationes dicuntur, quæ se inuicem nec majores sunt, nec minores. Ratio autem altera ratione major dicitur, quæ æqualem excedit: Minor vero quæ ab æquali ratione deficit. Sicut autem quantitates cum quantitatibus comparatæ, vel æquantur inuicem, vel sunt inæquales, ita ut una quidem aliam excedat, altera vero excedatur: ita etiam rationes inuicem comparatæ, uel æquales sunt, uel inæquales. Æquales rationes sunt, quarum quantitas est æqualis: ut dupla ratio duplæ; tripla, triplæ; sextupla, sextuplæ; sesquialtera, sesquialteræ; atq; sic in omnibus rationibus excessus: tum subdupla, subduplæ; subtripla, subtriplæ; subquadrupla, subquadruplæ; subsesquialtera, subsesquialteræ: atque sic in infinitum. Ex æqualium vero rationum natura, inæqualium rationum cognitio dependet. Sunt enim inæquales rationes, quarum quantitates inuicem comparatæ sunt inæquales; & cujus quantitas major, illa ratio major est; cujus vero quantitas minor, illa ratio minor. Quantitates autem, per æqualitatem mensurantur. Si enim magnitudo quæcunque cum alia quacunque magnitudine comparetur, quarum una aliam excedit; sumatur in majori magnitudine alia, minori æqualis, dabitur statim excessus majoris. Ita etiam in rationum collatione, si una conferatur cum ratione quæ alteri est æqualis; statim quidem apparebit, an altera ratio vel major sit, vel minor, vel æqualis. Quærendum



rendum ergo primo, qua methodo rationes æquales investigentur. Et in magnitudinibus quidē una ac simplicissima methodus est, nempe per multiplicationem in rationibus excessus, & divisionem in rationibus defectus. Est enim multiplicatio, ut unitas ad multiplicandam, sic multiplicandus ad multipulum seu quartum quæsitum. Ut verbi gratia in numeris, si velim multiplicare 128. per 4. erit ut 1. ad 4, sic 128. ad 512. Contra divisio est, ut divisor ad unitatem, sic dividendus ad divisum, seu quartum quæsitum, ut si 512 dividendus sit per 128. erit ut 128 ad 1, sic 512. ad 4. Quod autem unitas in numeris, id minor duarum magnitudinum est in magnitudinibus. Quando enim quæro aliquam magnitudinem quæ toties aliam in se contineat magnitudinem, quoties alia magnitudo aliam, hoc est ut clarius dicam, quando datis tribus magnitudinibus, quarum prima major est quam secunda, quæro autem quartam, quæ juxta eandem mensuram tertiæ excedat tertiam, juxta quam prima excedit secundam: constructis triangulis similibus, ut in fig. num. V. dico ut secunda ad primam, sic tertia ad quartam. Sit enim AB. 7. pedum: BC. 1. DE. 9 pedum: dico, ut se habet BC ad AB. sic DE. ad quartum quæsitum.

seu ut 1. ad 7, sic 9. ad 63.

Quod quidem sola multiplicatione investigatur. In lineis autem est, ut BC. ad AB, sic DE. ad EA. At q; hoc adeo in omni multiplicatione verum est. Si e-

Cc 3

nim

nim BA. fuerit dupla ipsius EB. etiam EA. erit dupla ipsius DE. & si BA. sesquialtera ipsius BC, etiam EA. erit sesquialtera ipsius ED: ac demum juxta quamcunque rationem, AB. major fuerit magnitudine BC. juxta eandem rationem magnitudo AE major erit magnitudine DE.

Omnis ergo multiplicatio in magnitudinibus hoc modo fit. Si datis tribus magnitudinibus, quarum prior major sit secunda, quæro autem quartam, quæ juxta eandem rationem & multiplicationem sit major tertia, qua prior major est secunda: dico, ut secunda minor ad primam majorem, sic tertia ad quartam. Adeoque quando datam quæcunque magnitudinem ita augere velim, ut aucta seu composita ad simplicem habeat eandem in excessu rationem, quam alia magnitudo major ad aliam minorem, constructo triangulo juxta figuram num. V. dico ut secunda minor ad primam majorem, sic tertia ad quartam. Adeoque habeo magnitudinem auctam seu compositam juxta illam rationem, quam habet prima ad secundam.

Si vero datis tribus magnitudinibus, quarum prima minor est quam secunda, vellem autem tertiam ita dividere, ut portio ad totam haberet eandem rationem quam prima ad secundam: exstruo rursus triangula similia bina, ut in figura num V. atque inde concludo, ut secunda seu major magnitudo ad primam minorem, sic tertia ad quartam, seu ad divisum. Ut in figura numero V. si magnitudo AB. esset triens magni-



magnitudinis AE, quærerem vero trientem ipsius DE, constructis ut illic triangulis æquiangulis dico ut EA. major magnitudo ad BA. minorem; sic DE. ad CB. Adeoque DE. magnitudo divisa est in tres partes, & CB se habet ad DE. ut BA. ad EA.

Multiplicatio ergo & divisio eodem plane modo perficitur, tantum hoc discrimine retento, quod in multiplicatione factum se habeat ad tertium, ut majus ad minus: in divisione vero, factum seu divisum se habeat ad tertium, ut minus ad majus. Operatio quoque in multiplicatione diversa est ab operatione in divisione. Illic enim pro inveniendis quæsitum est, ut minor ad majorem terminum, sic tertius terminus ad quæsitum. In divisione autem pro inveniendis divisio dicimus, ut major terminus ad minorem, sic tertius ad quæsitum. Quod utrumque ex priori exemplo liquet. In multiplicatione enim DE. pro inveniendis EA. multipla ipsius, erat, ut CB minor terminus ad AB majorem, sic DE. ad EA. Factum autem per hanc multiplicationem, nempe EA ad suum terminum DE, se habet ut major terminus BA ad CB. terminum minorem. In divisione autem pro inveniendis CB. parte ipsius DE. est ut EB. major terminus ad BA minorem terminum; sic DE. ad CB. Divisum autem CB. se habet ad totum DE. ut AB. minor terminus ad AE. majorem terminum.

Quando ergo datis tribus terminis, quæritur quartus, qui ad tertium terminum eam habeat rationem quam primus ad secundum: videndum statim est, an pri-

primus terminus sit major secundo, vel minor. Si major est secundo, hoc est, si fuerit ratio excessus, tum quartus erit major tertio: adeoque tertius terminus augendus est seu multiplicandus, fietque ut minor ad majorem, sic tertius ad quartum. Tum enim quartus ad tertium eandem habebit rationem quam primus ad secundum. Atque hoc modo in omnibus rationibus excessus queritur ratio æqualis per multiplicationem. Quod si primus terminus secundo minor fuerit, tertius terminus dividendus erit, dicendumque ut major ad minorem, sic tertius ad quæsitum. Ita enim quartus terminus eandem habebit rationem ad tertium quam primus ad secundum. Talique modo ratio æqualis queritur cuicumque rationi defectus. Omnis ergo operatio per quam quartus terminus ita queritur, ut dicatur, ut minor terminus ad majorem, sic tertius ad quæsitum, est multiplicatio. In qua autem quartus ita queritur ut dicatur, ut major terminus ad minorem, sic tertius ad quæsitum vocatur divisio. In multiplicatione enim est, ut 1. ad 5. sic 6. ad 30. quinquies enim sena sunt triginta. In divisione autem est ut 5. ad 1. sic 30. ad 6. quinque enim in triginta habeo senes. Quod autem unitas in numeris, id inter magnitudines, minor magnitudo ex duabus est. Hac ergo methodo cuicumque rationi data alia æqualis ratio constituitur: nempe, si ratio fuerit excessus, tum multiplicando altera ratio acquiritur. Si vero ratio fuerit defectus, tum dividendo æqualis huic con-



constituitur. Quam autem nos æqualem rationem dicimus, eam Euclides similem vocat: quamvis in rationibus inæqualibus nomina quantitatis retinuerit, vocando unam majorem, & alteram minorem. Aristoteles vero eadem appellatione usus est, quæ nos. Illi enim ratio æqualis dicitur, quam nos hoc nomine insignivimus. Quod vero Theonem Smyrnæum attinet, is singularem hac in parte sententiam habet. Vocat enim rationem æqvalem, quam nos æqualitatis dicimus, & quam ipsemet alibi λόγον ἰσότητος appellat: majorem vero, quæ nobis ratio excessus dicitur Græcis λόγος ὑπεροχής: oppositam vero huic rationem defectus vocavit λόγον ἐλάττωσιν seu rationem minorem. Locus est capite XXII. libri secundum seu de musica, τῶν δὲ λόγων ἰσότης οἱ μὲν εἰσὶ μείζονες, οἱ δὲ ἐλάττωες, οἱ δὲ ἴσοι. Οἱ μὲν ἔν ἴσος εἰς καὶ ὁ αὐτὸς λόγος, καὶ περιγίνεται πάντων τῶν λόγων καὶ ἐστὶ στοιχείωδης. ἴσοι δὲ εἰσὶν οἱ καὶ τὴν αὐτὴν ἰσότητά ἐξείαζόμενοι πρὸς ἀλλήλους. οἷον ἐν πρὸς ἐν, καὶ δύο πρὸς δύο, καὶ τετρα πρὸς τετρα, καὶ ἑκατὼν πρὸς ἑκατὼν. τῶν δὲ μειζόνων οἱ μὲν πολλαπλάσιοι, οἱ δὲ ἐπιμόριοι, οἱ δὲ ἑδέτεροι. Ὀμοίως δὲ καὶ τῶν ἐλάττωνων, οἱ μὲν ὑποπολλαπλάσιοι, οἱ δὲ ὑπεπιμόριοι, οἱ δὲ ἑδέτεροι. *Rationum aliæ sunt majores, aliæ minores, aliæ vero æquales. Aequalis ergo una est & eadem, omnesque rationes præcedit, ac elementi vicem habet.* *Æqua-*

D d

les

les autem sunt, quæ eandem inter se æqualitatem habent, ut unum ad unum, duo ad duo, decem ad decem, centum ad centum. Majorum vero rationum aliæ sunt multiplæ, aliæ superparticulares, aliæ neutræ. Minorum pariter, aliæ sunt submultiplæ, aliæ subsuperparticulares, aliæ neutræ. Ex quibus id sequi videtur quod antea indicavi, æqualem rationem Theoni Smyrnæo appellari, quam nos æqualitatis dicimus, imo quam ipsemet plurimis in locis λόγον ἰσότητος appellat. Egidem, si diceremus numeros ἐν πρῶτῳ ἐν, δύο πρῶτῳ δύο δευτέρῳ δευτέρῳ ἑκατέρῳ πρῶτῳ ἑκατέρῳ à Theone tantum notis fuisse indicatos, scriptumq; α' πρῶτῳ α', καὶ β' πρῶτῳ β', καὶ γ' πρῶτῳ γ'. καὶ δ' πρῶτῳ δ'. per que hos numeros quantitates, intelligendas esse non terminorum invicē, sed ipsarum rationum: adeoque integre scribendum εἰν ἐν πρῶτῳ ἐν καὶ διπλάσιον πρῶτῳ διπλάσιον, καὶ δεκαπλάσιον πρῶτῳ δεκαπλάσιον, καὶ ἑκατέρῳ πλάσιον πρῶτῳ ἑκατέρῳ πλάσιον, ut unū ad unū ( seu simplū ad simplū ) duplū ad duplū, decuplum ad decuplum, centuplum ad centuplum; facile hæc Theonis verba cum aliorum Geometrarum mente conciliari possent. Si enim duæ rationes æqualitatis invicem comparantur: utrinque est ratio unitatis ad unitatem. Ratio autem dupla est æqualis rationi duplæ, & decupla decuplæ, & centupla centuplæ. Id quoque quod de majoribus rationibus subjungitur, illas esse vel multiplas, vel superparticulares, vel neu-

tras



tras; satis commode explicari posset: nēpe ut ratio non-  
 cupla vel vigecuploseptupla &c. esset multipla ratio-  
 nis triplæ. illa quidem dupla vel duplicata, hæc tripla  
 vel triplicata. Sic ratio 81. ad 3. est sesquialtera ra-  
 tionis 27. ad 3. & ratio 81. ad 1. est sesquitertia rati-  
 onis 27. ad 1. Ratio autem 243. ad 1. collata cum  
 ratione 27. ad 1. neque multipla est, neque superpar-  
 ticularis, sed neutra, & quidem, juxta priorem metho-  
 dum est superpers. Eodem modo ratio 1. ad 27. est sub-  
 tripla rationis 9 ad 27. & 1. ad 81. subquadrupla ratio-  
 nis 27. ad 81. & sic in cæteris. Sed quæ de harmonicis  
 postea subjunguntur, cum hac explicatione non vi-  
 dentur convenire posse. Quicquid sit: certum qui-  
 dem est, Theonem Smyrnæum & alibi placita alio-  
 rum Geometrarum non tam accurate fuisse sequutum.  
 Cap. enim XXI. libri secundi definit ἀναλογία,  
 quamcunque mutuam habitudinem duarum rationum  
 inter se. *Ἀναλογία δὲ ἐστὶ λόγων, ἡ πρὸς ἀλλήλους ποῖα*  
*χέσις, οἷον ὡς δύο πρὸς ἓν, ὅτεως ὁκτὼ πρὸς τέσσαρα.* *Analo-*  
*gia autem seu proportio, est mutua quæcunque rationum*  
*relatio, verbi gratia, ut duo ad unum, sic octo ad qua-*  
*tuor.* Exemplum quidem adjunctum veram & Geo-  
 metricam proportionem monstrat: sed definitio ni-  
 mis est generalis. Etenim si ἀναλογία est mutua quæ-  
 cunq; rationum relatio λόγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποῖα χέσις,  
*qualiscunq; relatio rationum invicem:* utique cum in-  
 ter rationes 3 & 1. & 5 ad 2. detur aliqua relatio, et-

Dd 2

iam

iam illic erit ἀναλογία: quod tamen verum non est. *Ἀναλογία* enim est quando rationes eadem vel æquales fuerint. Ita quidem bonus hic Theo parum accuratus in scribendo fuisseprehenditur. Quod autem Marcus Meibomius hunc Theonis Smyrnæi sive errorē, sive opinionem, veteribus in genere attribuit, eamque ob rem, eosdem carpit: id vel imperite admodum, vel maligne ab ipso factum est. Diffiteri quidem nequit quin inter veteres rerum Geometricarum ac Mathematicarum scriptores, hi vel inter primos sint ponendi, Euclides, Aristarchus Samius, Archimedes, Theodosius Tripolita aliiq;: quos tamen in eadem cum Theone Smyrnæo sententia fuisse, vix ipsemet dixerit. Scripta quidem eorum testantur, non tam arctis limitibus has voces circumscripsisse, ut solas rationes excessus maiores dicerent, solasque rationes defectus minores. Etenim si duæ rationes excessus inæquales comparentur invicem, unam quidem maiorem dixere, alteram minorem. Sic duarum inæqualium rationum defectus, unam quidem maiorem appellarunt, alteram minorem. Verum quidem est quæcumque rationem excessus, si cum alia ratione, vel æqualitatis, vel defectus comparetur, semper esse maiorem. Tum quoque quæcumque rationem defectus, si cum ratione æqualitatis aut excessus comparetur, semper esse minorem, quod plenius postea demonstrabimus. Neque tamen ideo omnes rationes excessus



cessus simpliciter loquendo majores sunt dicendæ; nisi respectu rationis æqualitatis. Neque omnes rationes defectus simpliciter minores sunt dicendæ; nisi respectu rationis æqualitatis. Nam ut una ratio excessus, altera ratione excessus, major est, altera minor: sic eodem modo, duæ rationes defectus invicem collatæ, unam faciunt altera minorem, alteram vero majorem. Quando ergo ratio æqualis aut major aut minor dicitur: tum id semper fit respectu alterius rationis. Evidem si dicamus Theonem unamquamque rationem duplici modo considerasse, primo quidem, ut antecedens ad consequens, secundo, ut consequens ad antecedens; aliquo modo hæc sententia tolerari potest. Nam in rationibus æqualitatis, ut antecedens ad consequens, sic consequens ad antecedens. In rationibus vero excessus, antecedens ad consequens majorem rationem habet, quam consequens ad antecedens. In rationibus vero defectus, ratio antecedentis ad consequens, est minor quam consequentis ad antecedens. Id certum est veterum Geometrarum præstantissimos optime novisse quænam rationes essent æquales, quæ majores, quæ minores. Adeoque mera calumnia est Meibomii, qui veteres in genere sine omni exceptione accusat, quod in his appellationibus erraverint. vid. pag. libri ipsius 110. lin. 7. & 8. & confer cum hac paginam quam illic citat, nempe decimamtertiam.

Dd 3

CAP.

## CAP. VIII.

Explicata methodo inveniendi rationes æquales tam in rationibus excessus, quam defectus : nunc illud nobis incumbere videtur, ut quod antea sumus polliciti, id jam præstemus, rationumq; conjunctionem, tam componendo, quam dividendo in medium adferamus. Est ergo conjunctio rationum, quando factum ex multiplicatione aut divisione antecedentis termini, alicujus rationis, per aliam rationem, comparatur cum consequente eiusdem rationis. Ut sint duæ rationes 7 ad 2. 4 ad 3. invicem conjungenda. Rationi 7 ad 2. quæritur æqualis quæ se habeat ad 4. ut 7 ad 2. dico ergo, ut 2. ad 7. sic 4. ad 14. Ratio ergo 14. ad 3. est composita ex rationibus 7. ad 2. & 4. ad 3. Eodem modo, si quærat ratio facta ex rationibus 2. ad 7. & 4. ad 3. dico dividendo, ut 7. ad 2. sic 4. ad alium  $1\frac{1}{2}$ . Ratio ergo  $1\frac{1}{2}$  ad 3. seu 8. ad 21 in integris numeris est facta per divisionem ex rationibus 2 ad 7. & 4. ad 3.

Omnis ergo ratio, quæ cum alia ratione conjungitur, est vel excessus, vel defectus. Si ratio fuerit excessus, tum per multiplicationem factum invenitur. Si autem ratio fuerit defectus per divisionem. Atque illic quidem factum erit maius, utpote compositum: heic vero factum erit minus, utpote divisum. Quod exemplis ac demonstratione oculari melius percipitur. Tres autem omnino casus sunt, qui in hac conjunctione considerantur. Etenim vel  
duæ



duæ rationes excessus conjunguntur invicem, vel duæ rationes defectus, vel una ratio excessus altera defectus. Si ambæ rationes excessus fuerint; multiplicando productum augetur: adeoque, ratio composita fit major rationibus componentibus. Si ambæ rationes fuerint defectus: tum una ratio alteram dividit: ratioque divisa, utraqve ratione, nempe & dividente & dividenda, minor est. Denique si una ratio fuerit excessus, altera defectus: tum ratio excessus, divisa per rationem defectus, dabit factum seu productum, minus quidem ratione excessus, majus vero ratione defectus. Sit in figura num. VI. ratio A ad B conjungenda rationi C ad D. utraq; quidem ratio est excessus, A enim excedit B. & C excedit D. quæro ergo alium terminum nempe E. qui quidem se habeat ad C. ut A ad B. Quoniam ergo quæritur ratio E ad C. æqualis rationi A ad B. investigatur quidem ille in lineis per multiplicationem: eritque, ut B ad A. sic C ad E. vel constructis binis triangulis æquiangularis, factaque IB æquali rectæ B, & IC. æquali rectæ C, denique BA æquali rectæ A: erit multiplicando, ut minor terminus IB. seu B, ad majorem BA seu A; sic IC seu C. ad CE vel E. adeoque ut se habet AB ad BI. hoc est A ad B; sic se habet EC ad CI. vel E ad C. Ratio ergo E ad D. est facta per conjunctionem duarum rationum excessus, A ad B, & C ad D. idque inveniendo per multiplicationem terminum E, & rationem E ad C. æqualem rationi A ad B.

In

In omnibus ergo magnitudinibus, quando duæ rationes excessus invicem junguntur; tum terminus ille qui cum consequente alterius rationis, ut cum suo proprio consequente comparatus, dat rationem conjunctam seu compositam, seu qui ad antecedentem terminum unius rationis se habet, ut antecedens alterius rationis ad suum consequens; invenitur per multiplicationem. Adeoque ratio composita ex binis rationibus excessus, est major utraq; ratione, ex qua componitur.

Quando autem duæ rationes defectus junguntur invicem, ita ut faciant aliam rationem: tum una ratio dividit aliam, adeoque factum seu productum minus est eo ex quo fit. Sit in fig. num VI. ratio B ad A defectus, & D ad C. etiã defectus, quæro terminum qui se habeat ad D. ut B ad A. hoc est quæro rationem ex binis hisce rationibus factam seu enatam. Quoniam autem terminus qui investigatur se habet ad D. ut B ad A ratio autem BA. sit defectus, ergo ratio huic æqualis investigatur per divisionem. ut Capite VII. demonstratum est. Unde dico ut A ad B. sic D ad quartum seu minus. vel constructis binis triangulis æquiangularis fig. num. VII. nempe ABC & ADE. est ut AB. hoc est A, ad BC. hoc est B; sic AD seu D, ad DE seu E. Adeoque terminus quæsitus E se habet ad D, ut B ad A. Inventus autem est hic terminus per divisionem. ratio ergo D ad C. dividitur per rationem B ad A. in rationem E ad C. adeoque dividenda ratio est D ad C. dividens



videns ratio est B ad A. & divisa seu facta est E ad G. Quando ergo duæ rationes defectus aliam faciunt rationem, ratio quæ inde enascitur est, divisa, hoc est, facta ex divisione unius rationis per aliam.

Atq; hoc in magnitudinibus satis liquet. Quod autem etiam in numeris eodem modo se habeat, ex rationibus effabilibus demonstratur. Sint ergo duæ rationes excessus invicem componendæ 7 ad 2. & 4 ad 3. hoc est, in magnitudinibus, sit in fig. num. VIII. A. septem partium talium, quæ talium B. est duarum: C. vero talium quatuor, quæ talium D. est trium. Quæro per priora rationem compositam ex hisce binis, hoc est, quæro terminum E. quæ se habeat ad C. ut A ad B. tum enim ratio E ad D. erit facta ex ratione C. ad D. per rationem A ad B. Quoniam vero ratio A ad B. est excessus, ergo æqualis huic rationi invenietur per multiplicationem; ut capite VI. dictum fuit: exstructisq; similibus triangulis, erit, ut B ad A. sic C ad E. Adeoque ratio E ad C. erit æqualis rationi A ad B: ratio autem E ad D. composita ex binis rationibus A. ad B. & C. ad D. In numeris ergo idem obtinebimus. Quærat enim ratio æqualis rationi 7 ad 2. dato consequente 4. seu, quærat numerus, qui se habeat ad 4. ut 7 ad 2. erit ut 2 ad 7. sic 4 ad quæsitum 14. Adeoque 14 se habet ad 4. ut 7 ad 2. Ratio autem 14 ad 3. est composita ex ratione 7 ad 2. &

E e

4 ad

4 ad 3. In rationibus autem defectus, methodus est inversa, sicut etiam in magnitudinibus. Si enim quæritur ratio facta ex binis rationibus 2 ad 7. & 3 ad 4: quæritur terminus qui se habeat ad 3. ut 2 ad 7. Hoc autem fit dividendo. Sit enim in figura num. VIII. B. duarum partium talium, quælium A est septem. D vero talium trium, quælium C est quatuor. Ratio ergo B ad A. &  $\frac{2}{7}$ : & ratio D ad C. est  $\frac{3}{4}$ . Divide B. eo modo, ut divisum ad totum, se habeat, ut D ad C. Hoc est secta B. in quatuor partes æquales EF. FG. GH. HI. erit EH. talium trium partium, quælium tota EI. hoc est B. est quatuor: adeoque EH. se habet ad B. ut D ad C. Quælium autem B. fuerit 4, talium A. erit 14. adeoque ratio EH. facta dividendo ex ratione B ad A. per rationem D ad C. erit ut 3 ad 14.

Adeoque liquet rationem factam ex binis rationibus excessus semper esse compositam, ideoque maiorem partibus componentibus: factam vero ex binis rationibus defectus, semper esse divisam. In rationibus enim excessus, antecedens unius rationis augetur eo modo, ut auctum ad primum, eandem habeat rationem, quam antecedens alterius rationis ad suum consequens. In rationibus autem defectus antecedens unius rationis eo modo dividitur, ut divisum ad totum, eam habeat rationem, quam antecedens alterius rationis ad suum consequens. Atque ex hoc fundamento Euclides à priori demonstravit propositionem

nem



nem XXIII. libri VI. Elementorum, ubi in æqvian-  
 gulis parallelogrammis monstrat hanc rationem fac-  
 tam ex binis aliis: quam quidem Propositionem ipse-  
 met Meibomius nusquam falsi accusat, tantum ait, il-  
 lam ab aliis Geometris non fuisse intellectam, idque  
 ob hanc solam causam, quod rationum ineffabilium  
 compositionem hinc demonstrari posse ignoraverint.  
 Sed de hac Meibomii falsitate postmodum. Nunc  
 illud tantum indicare volui, Euclidem ea omnia quæ  
 hucusque de compositione & divisione rationum de-  
 monstravi, simpliciter ut principium supponere, ad  
 propositionem prædictam. Demonstrationem in-  
 tegram adscribam ut benevolus Lector, eo melius  
 de tota re judicare possit. Ἐστὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμ-  
 μα τὰ ΑΓ. ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ  
 ΕΓΗ. λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ πα-  
 ραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν,  
 τῷ τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.  
 Κεῖσθαι γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ. ἐπ' εὐθείας ἄ-  
 ρα ὅτι καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, καὶ συμπεπληρώσθαι τὸ ΔΗ παραλ-  
 λελόγραμμον, καὶ ἐκκεῖσθαι πρὸς εὐθείαν ἡ Κ, καὶ γενέσθαι ὡς  
 μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, ὅπως ἡ Κ πρὸς Α· ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς  
 τὴν ΓΕ, ὅπως ἡ Κ πρὸς τὴν Μ. Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ  
 πρὸς τὴν Α, καὶ τῆς Α πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοὶ εἰσὶ τοῖς λόγοις τῶν  
 πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

E e 2

'Αλλ'

Ἄλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγος σύγκειται ἐκ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ λόγου, καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ. ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεὶ ὅτιν, ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, ἔπως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ. Ἄλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, ἔπως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ἔπως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. Πάλιν ἐπεὶ ὅτιν, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ ἔπως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΓΕ ἔπως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ. καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, ἔπως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, Ἐπεὶ ἐν εἰδείχθη ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ἔπως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, ἔπως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ· δι' ἴσιν ἄρα ἔστιν, ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, ἔπως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ. λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

*Sint in figura num. IX. æquiangula parallelogramma ΑΓ Θ ΓΖ in quibus angulus ΒΓΔ unius parallelogrammi, æqualis sit angulo ΕΓΗ alterius parallelogrammi: dico quod ΑΓ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum rationem habeat conjunctam seu factam ex lateribus; nempe ex ratione quam habet ΒΓ ad ΓΗ, Θ quam habet ΔΓ ad ΓΕ, Jaceant enim ΒΓ in directum ipsi ΓΗ. Recta ergo ΔΓ etiam in directum jacebit ipsi ΓΕ (per propositi-*

*onem*



onem XIII. I. Elem. Sunt enim anguli  $\Delta GH$  &  $HGE$  æquales duobus rectis ). Compleatur  $\Delta H$  parallelogrammum ; & sit aliqua recta, nempe  $K$ . fiatque ut  $BG$  ad  $GH$  sic  $K$  ad  $\Delta$ . Ut vero  $\Delta G$  ad  $GE$ . sic  $\Delta$  ad  $M$ . Rationes ergo  $K$  ad  $\Delta$ , &  $\Delta$  ad  $M$  eadem sunt, quæ rationes laterum, nempe  $BG$  ad  $GH$ , &  $\Delta G$  ad  $GE$ . Sed ratio  $K$  ad  $M$  facta est ex ratione  $K$  ad  $\Delta$ , &  $\Delta$  ad  $M$ , ita ut ratio  $K$  ad  $M$  rationem habeat factam ex lateribus. Et quoniam est, ut  $BG$  ad  $GH$ , sic  $AG$  parallelogrammum ad  $GO$  parallelogrammum ; sed ut  $BG$  ad  $GH$ , sic  $K$  ad  $\Delta$  : erit ergo ut  $K$  ad  $\Delta$ , sic  $AG$  parallelogrammum ad  $GO$  parallelogrammum. Rursum quoniam est, ut  $\Delta G$  ad  $EG$ , sic  $GO$  parallelogrammum ad  $GZ$  parallelogrammum. Sed ut recta  $\Delta G$  ad rectam  $GE$ , sic  $\Delta$  ad  $M$ . Erit ergo ut  $\Delta$  ad  $M$ . sic  $GO$  parallelogrammum ad  $GZ$  parallelogrammum. Quoniam vero demonstratum est, ut  $K$  ad  $\Delta$ , sic  $AG$  parallelogrammum ad  $GO$  parallelogrammum ( per I. propos. libri VI. ) sicut vero  $\Delta$  ad  $M$ , sic  $GO$  parallelogrammum ad  $GZ$  parallelogrammum : ex æquo ergo erit, ut  $K$  ad  $M$ . sic  $AG$  parallelogrammum ad  $GZ$  parallelogrammum.  $K$  autem ad  $M$ . habet rationem factam ex lateribus. Ergo &  $AG$  parallelogrammum ad  $GZ$  parallelogrammum rationem habebit factam ex lateribus. Hæc est tota ratio demonstrationis Euclidæ : ex qua liquet auctorem id supponere quod nos hucusque proposuimus, factam nempe rationem illam esse, quæ est, inter terminum multiplicatione aut divisione inventum, & consequens unius rationis. Ut verbi gratia:

Ec 3

fi  $\Delta$

si  $\Delta$  æquatur ipsi  $\Delta\Gamma$  &  $M$  ipsi  $\Gamma E$ , adeoque  $\Delta$  ad  $M$ . sit æqualis rationi  $\Delta\Gamma$  ad  $\Gamma E$ . pro invenienda ratione facta ex  $B\Gamma$  ad  $\Gamma H$  &  $\Delta$  ad  $M$ . dico juxta nostram methodum ut  $\Gamma H$  ad  $B\Gamma$ , sic  $\Delta$  ad  $K$ . Habet ergo  $K$  ad  $\Delta$  eandem rationem quam  $B\Gamma$  ad  $\Gamma H$ . adeoque  $K$  est terminus quæsitus, qui cum  $M$  comparatus dat rationem factam ex rationibus  $B\Gamma$  ad  $\Gamma H$  &  $\Delta\Gamma$  ad  $\Gamma E$ . plane ut prius. Hoc ergo supponit Euclides, neque ullo modo explicat, quod forte Meibomio causa erroris fuit. Nos autem demonstramus, & rem se ita habere; & tamen alias esse rationes compositas, eas nempe quæ per multiplicationem investigantur, & alias rationes divisas, quæ per divisionem.

Quod autem vocem *συνέμεν* exposuerimus per factam, ejus quidem rei hanc causam habuimus. Quoniam enim majus quidem parallelogrammum ad minus in rationibus excessus, compositam habeat rationem ex ratione laterum; minus vero, rationem divisam: ideo pro voce *συνέμεν*, posuimus factam, quæ & compositioni per multiplicationem, & divisioni convenit. An vero Euclides eo sensu hanc vocem usurpaverit, id pro certo non affirmaverim. Quamvis enim Euclides hoc modo à crimine negligentiae liberari possit, quasi ipsam quoque rationum divisionem hoc verbo comprehendisset; quod & capite VI. pag. 103. à nobis tentatum fuit: tamen si accurate omnia sunt examinanda, vereor ne hoc minus

cer-



certum deprehendatur. Dicendum potius est, ipsum non magis in hac propositione XXIII. libri VI. divisionis rationum meminisse; quam in definitionibus: adeoque solam rationum compositionum ipsi fuisse traditam, quod existimaret, contrariorum contrariam esse scientiam. Ipsæ enim voces συγκεῖναι & συνήθεναι apud Euclidem eandem rem denotare videntur, ut ex propositionibus XVII. & XVIII. libri V Elementor. liquet. Libro quidem VI. Elementorum definitione ultima, dat nobis compositionis rationum talem definitionem. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖναι λέγεται ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλίκότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινά. *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando duarum rationum quantitates invicem multiplicatæ faciunt aliam.* Legendum omnino cum antiquis τινὰ pro τινας. Quid autem πηλικότης rationum sit, aut quomodo debeat multiplicari, id minime indicat. Evidem si per multiplicationem quantitatum rationum illam intelligit, quia antecedentia invicem, & consequentia invicem multiplicantur: dubium non est: quin ipsa quoque rationum divisio, sub hac definitione comprehendi possit. Sit enim ratio EF ad ΓΔ in figura num. IX. defectus, & ratio HG ad ΓB etiam defectus: utraque autem sit effabilis, ac prior quidem, ut 2 ad 7. altera vero, ut 3 ad 4. Si ergo factam ex hisce rationibus aliam velim, divido unam ratio.

rationem per aliam. Sit itaq; in figura numero X. ut  $BF$  ad  $GH$ , sic  $FE$  ad  $HN$ . vel in numeris, ut 7 ad 2. sic 3. ad  $\frac{2}{3}$ . vel quod idem est, sic 21 ad 6. posita nempe pro ratione 3 ad 4. ratione 21 ad 28. quæ huic est æqualis. ratio ergo facta ex prioribus est 6 ad 28. seu 3 ad 14. Sed eadem ratio per multiplicationem antecedentium invicem & consequentium invicem investigatur. Bis terna enim sunt sex & quatuor septena 28. Unde ratio facta est sex ad 28. vel 3 ad 14.

Hoc ipsum in rationibus ineffabilibus locum habet. Sint enim rationes  $FE$  ad  $GA$  &  $HF$  ad  $GB$  ambæ ineffabiles & defectus: quæro ex iis rationem factam. Cum autem compertum sit ambas esse rationes defectus, ergo quarta quæritur per divisionem. Unde est in figura num. X. ut  $BF$  ad  $GH$ . sic  $BE$  quæ est  $FE$  ad  $HN$ . Ratio ergo  $HN$  ad  $GA$  est facta ex ratione  $EF$  ad  $GA$  divisa per rationem  $HF$  ad  $GB$ . sicut capite VII. demonstratum est. At vero multiplicando antecedentia harum rationum invicem & consequentia invicem, eadem ratio facta investigatur. Constructis enim binis parallelogrammis æquiangulis  $AF$  &  $CZ$ . junctisq; circa æquale angulum; ita ut  $HF$  in directum jaceat ipsi  $GB$ , &  $EF$  ipsi  $GA$ : clausoq; parallelogrammo  $\Delta FHO$ . dico parallelogrammum  $ZF$  habere ad parallelogrammum  $GA$  rationem factam ex divisione rationis laterum  $EF$  ad  $GA$ , per rationem laterum  $GH$  ad  $GB$ . Dividatur enim ratio  $HF$  ad  $GB$  per rationem  $EF$  ad  $GA$ , modo antea explicato; hoc est, dicatur, ut  $GA$  ad  $FE$ , sic  $HF$  ad  $GN$ .  
sump-



sumptaque æquali  $FN$  in linea  $GB$  exstructoque parallelogrammo æquiangulo, ducta parallela  $NA$  ipsi  $AB$  vel  $GA$ ; erunt parallelogramma  $AG$  &  $AZ$  æqualia: eritq; ut  $GA$  ad  $GE$ , sic  $AH$  ad  $AZ$ . sed ut  $AG$   $GE$ , sic  $GH$  ad  $GN$ . ergo ut  $AH$  ad  $AZ$ , sic  $HG$  ad  $GN$ . hoc est  $HA$  ad  $AG$ . Eandem ergo rationem habet  $HA$  ad  $AZ$  quam ad  $AG$ . Quæ autem ad idem eandem habent rationem, inter se sunt æqualia. Unde rursum  $AZ$  ad  $AG$  eandem habebit rationem, quam  $AG$  ad  $AG$ . Habet vero  $AG$  ad  $AG$  eam rationem, quam  $NG$  ad  $GB$ . hoc est rationem factam ex divisione rationis laterum  $HG$  ad  $GB$  per rationem laterum  $EG$  ad  $GA$ . Ratio ergo  $AZ$  ad  $GA$  est facta ex divisione rationum laterum invicem: idque per multiplicationem antecedentium invicem, & consequentium invicem. Quando enim ex binis lateribus exstruitur parallelogrammum: tum latera invicem sunt multiplicata. Adeoque ex hac ipsa figura demonstratur, quæ ratione, eadem plane methodo, & in Arithmetis & Geometricis ratio facta ex binis aliis rationibus investigatur: nempe per multiplicationem antecedentium inter se, & consequentium inter se; in omni collatione rationum, tam excessus invicem, quam defectus. Id quoque ex hoc Theoremate liquet, quo modo, in magnitudinibus ratio quæcunque facta ex binis quibuscunq; rationibus per multiplicationem terminorum invicem, in lineis inveniatur & exhibeatur. Ratio enim  $BG$  ad  $GN$  est facta ex binis rationibus excessus,  $BG$  ad  $GH$ , &  $AG$  ad  $EG$ , per multiplicationem am-  
Ff
borum

borum terminorum invicem. Habet enim parallelo-  
 grammum  $\Delta\Gamma$  ad parallelogrammum  $\Gamma Z$  rationem fac-  
 tam ex binis rationibus excessûs  $B\Gamma$  ad  $\Gamma H$ , &  $\Delta\Gamma$  ad  $\Gamma E$ .  
 At ratio  $\Delta H$  ad  $H E$  seu  $\Gamma Z$ , est eadem quæ  $\Delta\Gamma$  ad  $\Gamma E$ , hoc est  
 quæ  $H\Gamma$  ad  $\Gamma N$ . Parallelogramma ergo  $\Delta\Gamma$  &  $\Gamma Z$  sunt  
 æqualia. unde ut  $A\Gamma$  ad  $\Gamma Z$ , sic  $A\Gamma$  ad  $\Delta\Gamma$ . adeoque ratio  
 $A\Gamma$  ad  $\Delta\Gamma$  erit facta ex ratione  $B\Gamma$  ad  $\Gamma H$ , &  $\Delta\Gamma$  ad  $\Gamma E$ . Unde  
 &  $B\Gamma$  ad  $\Gamma N$ , quæ est eadem, quæ  $A\Gamma$  ad  $\Delta\Gamma$  erit facta ex  
 rationibus  $B\Gamma$  ad  $\Gamma H$ , &  $\Delta\Gamma$  ad  $\Gamma E$ . Adeoque in omni-  
 bus rationibus, tam excessûs, quam defectûs, ratio fac-  
 ta eodem modo, & in Geometricis, & Arithmeticis  
 investigatur; nempe per multiplicationem amborum  
 terminorum invicem. Id autem ideo contingit, quod  
 in utraque ratione tam excessus quam defectus, iidem  
 utrobique sint termini: hoc tantum discrimine, quod  
 antecedentia rationum excessûs sint consequentia ra-  
 tionum defectus: & vice versa, consequentia rationum  
 defectus, sint antecedentia rationum excessus: unde  
 per multiplicationem antecedentium invicem, &  
 consequentium invicem, tam in rationibus defectûs,  
 quam excessûs, ratio facta investigatur. In rationi-  
 bus enim excessus 2 ad 1. & 4 ad 3. si antecedentia 2.  
 & 4. fiant consequentia, & consequentia 1. & 3. fiant  
 antecedentia; ut sit, 1 ad 2. & 3 ad 4. jam duæ hæ ra-  
 tiones sunt defectûs: unde factum ex utrisque ratio-  
 nibus tam excessûs, quam defectûs eodem modo col-  
 ligitur: ita tamen ut antecedens in rationibus exces-  
 sûs, sit consequens in rationibus defectûs. bis quater-  
 na e-



na enim sunt 8. semel terna sunt 3 unde ratio facta ex rationibus excessus, est 8 ad 3. ratio autem 3 ad 8. est ratio facta ex rationibus defectus. Nemo tamen dixerit rationem 3 ad 8. esse compositam ex rationibus 1 ad 2. & 3 ad 4. Neque enim compositum minus est iis unde componitur. Rationem autem 3 ad 8. minorem esse ratione 1 ad 2. vel ratione 3 ad 4, & ex Euclide constat, & verum esse id ipsum postea contra Meibonium clarissime ac certissime monstrabimus. Si ergo ex Euclide aliquis contenderit, rationes omnes tam excessus quam defectus invicem eodem modo componi, eo quod facta ratio; tam ex compositione rationum excessus, quam divisione rationum defectus, per multiplicationem τὸ πηλικοτητῶν eodem modo investigetur, id autem ab Euclide compositio vocetur: respondeo Euclidem aliter explicari posse. Videtur enim in hac definitione solam rationum excessus compositionem tradere voluisse. De divisione autem, & ratione facta ex binis rationibus defectus nullum verbum fecisse. Nam & alibi necessariorum rerum definitiones omittit. Rationem enim minorem nusquam definit. Tum ipsius quoque majoris rationis definitio, potius est theorema aliquod demonstratione satis ampla indigens, quam definitio. Dici quoque potest Euclidem voce συγκείμεν latè ut loquuntur in Scholis fuisse usum, pro omni conjunctione quæ ex duobus unum fit, tam multiplicando,

Ff 2

cando, quam dividendo, quam explicationem superius etiam indicavimus capite VII. pag. 203. Quod si neutra hæc explicatio ipsi satisfecerit: neque aliam commodiorem ipse invenerit, quæ Euclides excusari possit: per me hac in parte Euclidem accuset ignorantia, & quod inter divisiones rationum, & earundem compositiones non accuratè distinxerit, neque has res plene ac distincte tradiderit. Neque enim mihi propositum est, negligentiam Euclideam defendere, sed veritatem in omnibus tutari. Quod si ergo Marcus Meibomius ab hoc capite accusationem contra Euclidem instituisset; me sibi contrarium non habuisset. Nunc cum vera & manifesta falsi arguere conetur; explosione dignus est.

Tertius autem casus est, quando ratio quæritur facta ex ratione excessus per rationem defectus, vel ratione defectus per rationem excessus: quæ quidem ratio & multiplicando, & dividendo investigatur. Si enim ratio defectus multiplicetur per rationem excessus, vel si ratio excessus dividatur per rationem defectus: eadem oritur ratio facta. Quæritur enim ratio facta ex rationibus 8 ad 3. & 2 ad 5. Fiat multiplicando ut 8 ad 3. sic alius ad 2, hoc est ut 3 ad 8. sic 2 ad  $5\frac{1}{2}$  hoc est, sic 6 ad 16. Ratio ergo  $5\frac{1}{2}$  ad 5. seu in integris numeris 16. ad 15. est facta multiplicando ex ratione 2 ad 5. per rationem 8. ad 3.

Rursum fiat dividendo, ut 5 ad 2. sic 8 ad  $3\frac{1}{2}$ . Ratio-



tio ergo  $3\frac{1}{2}$  ad 3, seu 16 ad 15. est facta ex ratione 8 ad 3 divisa per rationem 2 ad 5. Respectu ergo rationis defectus facta ratio composita dici potest: respectu autem rationis excessus, divisa. Si tamen accuratè loqui velimus, ratio divisa dicitur. In divisione enim fieri potest, ut divisum sit majus divisiore. Sed in compositione fieri nequit, ut compositum sit minus componente.

Ut ergo brevissimè totam rem absolvam, totamque factarum rationum naturam Lectori ob oculos ponam, dico omnes rationes vel esse integri ad integrum, seu totius ad totum: vel totius ad partem: vel partis ad totum. Nempe ratio æqualitatis est integri ad integrum, vel totius ad totum: neuter enim terminus alterius, vel pars est, vel totum. Ratio autem excessus est totius ad partem. Omnis enim magnitudo major continet minorem magnitudinem in se. Adeoq; minor magnitudo majoris magnitudinis pars est: & major minoris totum, unde ratio est totius ad partem. In rationibus vero defectus ratio est partis ad totum. minor enim magnitudo est pars majoris, quod contineatur in majore, non secus ac manus est pars corporis. Facta autem ratio est, quando binis rationibus datis, investigatur terminus, qui ad antecedens unius rationis se habeat, ut antecedens alterius rationis ad suum consequens. Ratio autem termini hujus ad consequens prius, est ratio facta ex binis datis rationibus. Unde in rationibus excessus cum ra-

Ff 3

tio

tio facta sit termini quarti ad consequens, qui quidem terminus est ad antecedentem ejus rationis, ut totum ad partem: debet ergo terminus esse major antecedente, adeoque ratio ipsa augeri. In rationibus autem defectus, terminus quæsitus debet esse pars antecedentis, sicut alterum antecedens est pars sui consequentis. At vero partem alicujus rei minorem ad aliud habere rationem, quam suum totum; id communi notione verumprehenditur: majorem vero rationem habere partem ad aliud, quam suum totum; id plane absurdum est.

## CAP. X.

Ut autem omnia & singula, quæ hætenus de compositione & divisione rationum dicta sunt, rectius intelligantur: hoc capite de singulis momentis iterum paucis dicemus. Fit ergo omnis rationum compositio, vel per additionem, vel per multiplicationem: omnis autem divisio, vel per subtractionem, vel per divisionem sigillatim ita appellatam. Est autem additio rationum, quando duabus rationibus ad idem consequens reductis, ambo antecedentia adjecta invicem faciunt unum antecedens, quod cum priori consequente comparatur.

Multiplicatio autem rationum in magnitudinibus est, quando antecedens unius rationis per alterius rationis antecedens multiplicatum, dat aliud antecedens, quod cum priori consequente comparatur.

Sub-



Subtractio rationum est, cum binis rationibus ad idem consequens reductis minus antecedens à maiore aufertur, aliudque relinquit antecedens, quod cum priori consequente comparatur.

Divisio rationum in magnitudinibus est, quando antecedens unius rationis per alterius rationis antecedens divisum, dat aliud antecedens, quod cum priori consequente comparatur.

Singula jam exemplis sunt illustranda. Sit ergo ratio 4 ad 3. addenda rationi 7 ad 5. reductis ambabus rationibus ad eundem terminum consequentem, ita ut pro ratione 7 ad 5. ponatur ratio 21 ad 15. quæ huic est æqualis: pro ratione autem 4 ad 3. ponatur 20 ad 15. quæ etiam huic est æqualis. Additis invicem 20. & 21. prodit ratio 41. ad 15. facta ex additione rationum 21 ad 15. hoc est 7 ad 5. & 20 ad 15. hoc est 4. ad 3.

Eodem modo si quærat ratio facta ex additione rationum 3 ad 4. & 5 ad 7. hoc est 21 ad 28. & 20 ad 28. prodit ratio 41. ad 28. Sic ratio 3 ad 4. addita rationi 7. ad 5. dat rationem factam ex additione 43 ad 20.

Ufus autem hujus additionis in Mechanicis atque in omni hominum vita quam maximus est. Atq; ut exemplis aliquot hoc Lectori ob oculos ponatur, sit primo in Mechanicis, faxum oblongum à terra elevandum plauastroque imponendum ABCDEF fig. no. vectis XI autem GH movens in H. & vectis IK movens in K. Sit  
autem

autem momentum GH minus pondere toto, sitque ratio moventis GH ad movendum BACDFE ut 3 ad 4. Huic autē æqualis sit ratio moventis IK ad motum BACDFE. Si igitur velim scire rationem compositam ex hisce binis rationibus, hoc est, rationem, quam ambo moventia ad motum corpus habent: vel, si eodem tempore, binis vectibus saxum æqualiter elevetur; quānam tum ratio sit moventis ad motum: addo antecedentia invicem, adeoque pronuncio rationem moventis ad motum, compositam ex binis rationibus moventibus, esse ut 6 ad 4. Et rationem moventis ad motum vere esse, ut 6. ad 4. vel 3 ad 2. hoc est sesquialteram, manifeste liquet. Quod si pro additione rationum altera heic compositione uti vellem, quæ fit multiplicando; falsum concluderem, neque veram rationem moventis ad motum investigarem. Si enim vulgari modo procederem, multiplicando antecedentia invicem, & consequentia invicem, facta ratio esset 9 ad 16. quæ plurimum differt à ratione 3 ad 2. seu sesquialtera. Sive debito hæc modo componerem, invertendo posteriorem rationem, cum alias compositio in hisce rationibus fieri nequeat, & postea multiplicando unum antecedens per aliud, dicendo, ut consequens unius ad suum antecedens, sic antecedens ad quartum: ratio facta esset  $5\frac{1}{3}$  ad 3. seu 16 ad 9. quæ etiam à vera plurimum differt. Hæc ergo rationum compositio, quæ fit per additionem, non minorem utilitatem in rebus habet,





que ratio duorum momentorum GH & IF, ad totum ABCDFE. est dupla rationis HG. ad idem ABCDEF. Quando vero, duæ magnitudines inæquales adduntur; tum composita magnitudo, diversam, ad componentia membra, rationem habet. Si enim in fig. XII. AB sit 4 partium, Bc 2 partium, tota Ac. erit quidem tripla ipsius Bc, sesquialtera autem ipsius AB. Quod ipsum, in hac quoque rationum compositione, quæ fit per additionem, venit observandum. Si enim ratio momenti GH, ad ABCDEF. in superiori diagrammate XI, fuerit ut 4. ad 2; ratio autem momenti IK, fuerit ut 8 ad 2: erit ratio composita 12 ad 2. hoc est sextupla: quæ quidem rationis 4 ad 2. hoc est, 2 ad 1, est tripla, rationis autem 8 ad 2, seu 4 ad 1, est sesquialtera. & sic in cæteris omnibus.

Porro si rationibus binis æqualibus invicem additis, aggregato harum, æqualis ratio addatur: facta ratio, tripla dicitur, rationis primæ. & si hujus aggregato, eadem ratio tertium addatur, facta ratio, quadrupla dicitur rationis primæ. & sic quintupla, sextupla, & porro in infinitum.

Hujus etiam usus in Mechanicis est demonstrandus. Sit in fig. num. XIII. obeliscus ABC erigendus super stylobatam FGEDHI. Sint vero ergatæ sex  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ . omnes æqualium virium inter se. Sit porro ratio ergatæ  $\alpha$ , ad pondus obelisci ABC, ut 7 ad 50. Ratio ergo ergatæ  $\beta$ , ad pondus obelisci ABC. erit etiam, ut 7. ad 50, & singularum ergatarum ratio, ad totum pon-



pondus, ut 7 ad 56. Si vero duæ ergatæ simul agant, quæraturo ratio moventis ad totum pondus: componantur duæ rationes, 7 ad 50. & 7 ad 50, invicem addendo: prodit ratio 14 ad 50: quæ etiam vera est ratio, duarum ergatarum, ad totum pondus. Unde ratio, 14 ad 50, est dupla rationis, 7 ad 50. Rursum si ratio trium ergatarum, ad totum pondus quæraturo; addantur tres rationes 7 ad 50 invicem, modo antea indicato: vel multiplicetur 7 per ternarium; eadem enim summa erit, nempe ratio 21 ad 50, quæ etiam est vera ratio trium ergatarum ad totum pondus. Tres vero æquales ergatas, triplam, ad totum pondus, rationem habere, rationis, unius ergatæ ad totum pondus, nemo sanus negabit; cum triplam operationem habeat, & triplo magis moveat: adeoque ratio moventis sit tripla. Hoc modo, si sex ergatarum rationes componantur: erit ratio moventis, ad id quod movetur, ut 42 ad 50. quæ quidem est sextupla rationis 7 ad 50. At vero in omni motu, ratio moventis ad motum, omnino erit ratio excessus. Si enim æqualitatis fuerit, resistentia rei movendæ, æqualis erit impulsioni moventis: adeoque nullus motus fiet. Sin ratio defectus: major erit movendæ resistentia, quam moventis impulsio. unde multo minus, tunc ullus motus fiet. Addatur ergo, ratio unius pluriumve ergatarum, usquedum, ratio moventis ad motum, fuerit excessus. Si ergo unius adhuc ergatæ, nempe, ratio, cum superioribus componatur, erit ratio mo-

Gg 2

ventis

ventis ad movendum, ut 49 ad 50. duarum vero ergatarum rationibus, priori rationi, additis: erit ratio moventis ad movendum, ut 56 ad 50. quæ quidem ratio, est octupla, rationis 7 ad 50.

Atque ex his liquet, quid ratio dupla, tripla, octupla, hoc in sensu sit: & quam bene, hæc nomenclatura huic rei conveniat. Idipsum quoque, quod heic maxime demonstratum cupimus, hinc clarissime liquet: rationes ipsas, addendo verè componi atque augeri.

Est quidem, alia quædam in mistis compositio, quæ, additione antecedentium & consequentium, peragi videtur: quæ tamen, proprie, compositio rationum non est. Si enim, eadem, vel æquales rationes, invicem, eo modo, addantur, semper, ratio facta, erit eadem seu æqualis. Ut si v. g. mistum farinæ hordeaceæ, & fabaceæ, in quo, ratio hordei ad fabas sit ut 4 ad 2 misceatur cum misto alterius farinæ, in quo, ratio hordei ad fabas sit, ut 8 ad 4: facta additione, antecedentium invicem, & consequentium invicem; prodit ratio facta 12 ad 6. Ea autem est æqualis rationi 4 ad 2, vel 8 ad 4. Unde hæc rationum compositio dici nequit: cum ratio facta, non sit major ea, ex qua componitur.

Subtractio autem rationum, additionis est conversio. Si enim, in priori diagrammate, rationi 56 ad 50. rationem 47 ad 50 detractam velim, aufero antecedens minus à majori: facta est operatio. Atque hoc quidem modo, ratio 7 ad 50, est suboctupla rationis 56 ad 50: subdupla vero, rationis 14 ad 50: & subtripla



pla 21 ad 50. Sed hoc ipsum, diagrammate quodam, demonstrandum. Si ergo, in figura XIII, pro obelisco, supponatur corpus parallelepipedum oblongum, cujus quidem ratio, ad omnes octo ergatas, sit, ut, 50 ad 56, incipiatq; parallelepipedum moveri: quo magis elevatur, eo minorem rationem ad ergatas habebit. Nam cum linea centri gravitatis perpetuo mutetur: etiam ipsum pondus mutatur. Divisa enim basi KLMN in partes æquales quotcunque, verbi gratia, decem, nempe OPQRSTVXYN. sectoque parallelepipedo in totidem segmenta juxta angulos rectos; erunt singula segmēta KLOo, OoPp, PpQq, Qq Rr, &c. singulis segmentis æqualia. Tum quoq; , parallelepipedum KLPp erit duplum parallelepipedi KLoO: & parallelepipedum KLQq, triplum parallelepipedi KLOo: & sic KLRr, quadruplum ipsius KLOo: & KLSs qvintuplum. Secto autem parallelepipedo KLOo plano diagonali OL: erit parallelepipedum KLOo sectum in duo prismata triangularia LOl & OLo. Eodem modo, secto parallelepipedo KLPp plano diagonali Lp: erit totum parallelepipedum sectum, in bina prismata triangularia lLp & LpP invicem æqualia. & sic in cæteris. Quoniam ergo, KLOo parallelepipedum, est pars decima KLMN parallelepipedi: erit prisma loL, quod est, semissis ipsius KLOo, pars vicesima totius parallelepipedi KLMN. Et eodem modo, KIlp prisma, est decima pars parallelepipedi KLMN, utpote semissis, KLPp parallelepipedi. Si er-

go parallelepipedum KLMN nonnihil erigatur, ita ut OL horizonti sit perpendicularis: erit pondus totius parallelepipedi, una vicesima parte imminutum: ratio autem moventis aucta. Quoniam ergo, ratio moventis, ad rem movendam, antea erat, ut, 56 ad 50. dempta vicesima parte ponderis, erit ratio moventis, ad rem movendam, ut, 56 ad  $47\frac{1}{2}$  seu ut 112 ad 95. Rursū, elevato parallelepipedo KLMN, ita, ut pL sit perpendicularis horizonti, erit pondus totius parallelepipedi decima parte imminutum: ratioque moventis ad rem motam, sine augmento altero ipsius parallelepipedi, ut, 112 ad 90, vel 56 ad 45. Quoniam ergo, in omni majoris parallelepipedi elevatione, ratio rei movendæ imminuitur; ratio vero moventis augetur: ergo, illic quidem, erit subtractio rationum; heic vero, additio. Et cum antea indicatum sit, rationem moventis, ad rem movendam, primo quidem loco esse, ut, 56 ad 50: erit ratio, rei movendæ, ad movens, ut, 50 ad 56. seu 100 ad 112. Aufertur autem, primò quidem vicesima, inde decima pars hujus; atque sic in infinitum. Cum ergo, ratio totius parallelepipedi movendi, ad mouentem, sit, ut, 50 ad 56, vel 100 ad 112; ergo ratio vicesimæ partis erit, ut 5 ad 112: & ratio decimæ, ut 10 ad 112, vel 5 ad 56. Aufer antecedens, rationis 5 ad 112, ab antecedente, rationis 100 ad 112: remanet ratio 95 ad 112. Rursū, aufer antecedens, rationis 10, ad 112, remanet ratio 90 ad 112. seu 45 ad 56. Quoniam vero, id, quod rationi rei



rei movendæ decedit, rationi moventis adjicitur; ergo ratio moventis ad movendum, fit major; ratio vero rei movendæ ad moventem, fit minor: sicut quis per se facile perspicit. Satis tamen clarè, ex hoc ipso exemplo, subtrahitio rationum intelligitur: tum quoque, quid, nostris Geometris, ratio dupla, tripla, quadrupla sit: & contra, ratio subdupla, subtripla, subquadrupla: & cur ita appelletur.

Atque ita quidem, prima & simplicissima rationum compositio, & divisio, fit addendo, & subtrahendo, antecedentia invicem, consequenti eodem retento. Altera autem compositio & divisio, fit multiplicando & dividendo antecedentia.

Magnitudo autem, per aliam magnitudinem, multiplicari dicitur: quando, juxta eam rationem augetur, juxta quam, multiplicans aucta est, seu, quando data parte magnitudinis multiplicantis, ratio magnitudinis multiplicandæ ad factam, fuerit, ut ratio partis datæ ad magnitudinem multiplicantem. Ut, in figura num. V. hujus libri, sit magnitudo DE multiplicanda per magnitudinem BA. Magnitudo ergo DE: est multiplicandum: magnitudo vero AB, multiplicans, cujus pars datur BC seu BE. Est autem ut BC, seu BE ad BA, hoc est, ut pars multiplicantis ad multiplicantem, sic multiplicanda magnitudo, ad factam AE. Si enim BA magnitudo multiplicans, tripla fuerit ipsius BE. seu BC. etiam EA tripla erit ipsius DE: & vice versa, qualiscunque pars BE fuerit ipsius AC, talis etiam DE erit pars ipsius EA. Quod

autem antea indicavi, id heic quoque observandum est, partem, me vocare, quamcunque magnitudinem alia minorem, quando duæ istæ magnitudines invicem comparantur: totum vero, quæ major est. eodem modo quo, manus, & pes, & digitus, & brachium, & quæcunque particula carnis, pars corporis appellatur.

Dividi autem magnitudo, per aliam magnitudinem, dicitur, quando, juxta eam rationem, secatur & dividitur, juxta quam, alia secta est. Ut in figura num. V. EA magnitudo sit dividenda, eo modo, quo AB dividitur per BE seu BC: dico, ut AB ad BE, sic EA ad DE. Scio quidem, alia methodo, & multiplicationem, & divisionem magnitudinum, fieri posse: verum id nostram methodum non tollit, neque hanc rationem multiplicationis, aut divisionis falsi arguit. Hoc ergo supposito, dico, compositionem rationum fieri multiplicando, quando, unius rationis antecedens, per alterius rationis antecedens, modo nunc à nobis monstrato, multiplicatur, factumque, cum eodem consequente, comparatur. Divisionem autem, quando, antecedens unius rationis, per alterius rationis antecedens, modo nunc indicato, dividitur: factumque, cum eodem consequente, comparatur.

Sit enim ratio AE ad AB, componenda multiplicando, cum ratione ED ad BC. Multiplico in fig. num. V. antecedens DE per antecedens AE, dicendo, ut, pars data, ipsius AE, hoc est, AB, ad AE, sic DE, seu BF, ad quartum quæsitum, seu GF: retentoque  
co-



dem consequente, dico rationem FG ad EB, seu BC compositam esse ex ratione DE ad BE per rationem AE ad AB, idque, multiplicando antecedentia invicem, eodem consequente retento.

Si vero ratio BA ad AE, dividenda sit per rationem BC ad DE, divido antecedens BA, per antecedens BC, dicendo, ut DE ad BC, sic BA seu LN ad BN. Unde ratio BN ad AE, erit facta ex ratione BA ad AE, divisa per rationem BC ad DE. Quod si in compositione aut divisione, alteram rationem sumere voluerimus: idem obtinebimus. Componatur enim ratio ED ad BC, multiplicando, cum ratione AE ad AB: erit, ut BC ad DE, sic AE seu BM ad OM. adeoque ratio OM ad BA est composita ex ratione EA ad BA, per rationem DE ad BC. Est vero ut OM ad BM, hoc est AE, sic AE ad BA. Sed ut GF ad BF, hoc est DE, sic DE ad BE seu BC. ergo componendo, ut, OM ad AB, sic GF ad BE. adeoque ratio ex utraque compositione, eadem nascitur, nempe duplicata

In divisione id ipsum contingit, quod inversis terminis patet.

Quando autem iisdem antecedentibus retentis, consequentia invicem, dicto modo, multiplicantur: rationes ipsæ dividuntur. quando autem consequentia dividuntur, rationes ipsæ componuntur. Si enim datis rationibus EA ad BA, & DE ad BC. retento antecedente EA, dixerim dividendo, ut DE ad

Hh

BC,

BC, sic BA, hoc est, LN ad NB : ratio facta erit EA ad BN, æqualis rationi OM ad BA, cum utraq; ratio sit duplicata ejusdem rationis. Si vero datis rationibus BA ad EA, & BC ad DE, dixerim multiplicando, ut BA ad EA : sic DE seu BF ad FG, ratio BC ad FG, erit facta dividendo. Cujus rei ratio in promptu est. Si enim consequentis ratio imminuitur, antecedentis augetur. si vero consequentis ratio augetur, antecedentis imminuitur & vice versa. quod, ex iis, quæ in exemplo de obelisco dicta sunt, plenius intelligitur. Atque ita quidem omnes quatuor modi Meibomiani pag. 115. propositi hac una methodo expediuntur: qui quidem malè dicto loco, additionem vocat, quæ multiplicatio foret dicenda: tum quoque multiplicationem cum divisione confundit, unde omnis ejus error originem habet, de quo postea. Pluribus quidem hæc illustrari possent, nisi antea id jam factum esset. Jamvero majoris illustrationis causa, & ut nostra sententia rectius percipiatur, breviter tantum omnia repetimus.

Quando ergo duæ rationes æquales, semel invicem multiplicando componuntur : ratio composita duplicata Geometris dicitur: quæ si iterum eodem modo cum priore componatur; ratio triplicata appellatur. & sic quadruplicata, quintuplicata. Quando autem ratio quædam æqualis, dividitur per aliam rationem æqualem, ratio facta subduplicata alterius, dicitur: & si hæc iterum per priorem dividatur, subtriplicata: & sic in infinitum subquadruplicata, subquintuplicata &c.

Cum



Cum enim illa compositio, quæ fit addendo, plurimum differat ab illa, quæ fit multiplicando: erretque Meibomius, qui pag. 115. hæc contra claram demonstrationem, rerumque veritatem confundit, idque absque omni causa illa quoque divisio, quæ fit subtrahendo, longe alia sit, quam quæ fit dividendo: etiam nomina diversa Mathematici recte adhibent ad diversas res explicandas ac denotandas. Mirari igitur satis nequeo, quid Meibomium moverit, ut tam illiberaliter Clavium aliosque tractaret, quod hisce vocibus prædictas res explicuissent. Negare quidem non potest, voces duplicatas, triplicatas esse probas & omnino Latinas: tum quoque voces Græcas διπλασίον, τριπλασίον &c. commode & recte Latinis auribus explicare. Quid ergo desiderat? Græcos quidem non accusat, qui rationes compositas, quas quidem multiplicando fieri nunc diximus, διπλασίως, τριπλασίως appellarunt. At quæro, num ne voces istæ Græce, optime apud Latinos exprimantur per duplicatas & triplicatas. Nemo sane id negabit, qui Latine Græceque novit, ac plane rudis non fuerit. Sed contendit Meibomius, voces istas explicandas esse per duplas & triplas. At cur non potius per duplicatas & triplicatas. Græci quidem, diversas voces habent, non minus quam Latini. Nam & verba διπλῶ, τριπλῶ agnoscunt, quæ Latine per duplare, triplare explicantur: & nomina διπλῆς, τριπλῆς, duplus, triplus. διπλασιάζειν vero & τριπλασιάζειν, Latine optime

H h 2

expli.

explicatur per duplicare triplicare, sicut διπλάσιος τριπλάσιος, per duplicatus triplicatus. Jam vero ratio illa, quæ Græcis διπλάσιων τριπλάσιων, (ipso quidem Meibomio iudice) recte & bene appellatur: Geometris Latinis, duplicata & triplicata dicitur. Altera autem, quā illi quos habemus Græci Geometræ, non denominarunt, (quæ tamen à priori vere distinguitur) dupla tripla. Quodnam ergo heic Geometrarum peccatum? quæve in re lapsi sunt? λόγον διπλάσιονα, τριπλάσιονα, Latine, rationem duplicatam, triplicatam dixerunt. Vere enim λόγος διπλάσιων est ratio duplicata, & τριπλάσιων triplicata. At vel ipso Meibomio iudice ratio ex binis rationibus æqualibus multiplicando composita, Græce & quidem recte & convenienter vocatur λόγος διπλάσιων, & juxta hunc modum τριπλάσιων & πετράπλάσιων. Cur ergo Latinè loquentibus eadem ratio duplicata triplicatæve dici nequit: cum διπλάσιων τριπλάσιων optime ac proprie per duplicata & triplicata exponatur? Hæc ergo censura Meibomii est plane inepta, ne quid gravius dicam. Qui enim concedit rationem aliam Græce convenienter appellari λόγον διπλάσιονα, τριπλάσιονα &c. idem concedet illam ipsam rationem Latinè duplicatam ac triplicatam appellari; cum voces duplicata, triplicata Latinæ sint; & Græcas hæc voces optimè explicent. Fuere quidem inter recentiores Geometras, qui rationes multiplicando factas duplas, triplas, quadruplasve, dixerunt: adeoque, si hæc Meibomii censura vera foret; nihil tamen novi  
is



is invenisset, nec quicquam in medium attulisset, quod non antea Commandino aliisque fuisset usurpatum. Ipse enim Commandinus, id quod Euclides vocat *λογον διπλοῦσιονα*, Latine vertit *rationem duplam*. Quippe, in Elementis Euclideis, nulla alia ratio composita occurrit, nisi quæ fit multiplicando. Quoniam tamen, alia est compositio rationis, quæ fit addendo; alia quæ fit multiplicando: rectius illi Geometræ fecerunt, qui distinctis vocibus, distinctas res indicarunt: ac illas, quidem, vocarunt duplas triplæve, has, duplicatas triplicatas. Sive autem censura hæc Meibomii approbetur, sive non: nihil est, unde gloriatur Meibomius, nihilque, ob quod vel Geometras recentiores in genere carpat, vel ut novum inventum ignorantibus obtrudat. Si enim necessario verum foret, id quod Meibomius dicit, (quamvis sine ullo argumento) rationes *διπλασίους* Latine dicendas esse *duplas*: neque inventum illud Meibomii esset, cum Commandinus aliique ante Meibomium ita sint loquuti; neque omnes in genere recentiores arguere, aut erroris insimulare posset; cum Commandinus aliique, quorum hæc sententia est, inter recentiores omnino sint ponendi. Neminem tamen adeo imperitum fore arbitror, qui non pervideat; cum duplex sit rationum compositio, una, quæ fit addendo, altera, multiplicando: quod etiam diuersæ res, diuersis vocibus debeant exprimi: recteque adeo à Geometris,

Hh 3

aliæ

aliæ rationes duplæ , aliæ duplicatæ appellentur.

## CAP. XI.

Alterum vero crimen Meibomii, longe gravius est, quod in Theone accusando committit. Hujus enim sententiæ & appellationis, qua rationes duplæ & duplicatæ invicem distingvuntur, auctorem facit Theonem Alexandrinum, qvem ideo satis acerbè perstringit, cum tamen, nusquam ab eo probetur, Theonem in hac sententia fuisse: & si fuisset, omnino rectè & accurate esset locutus. Sed ut utrumque crimen clarius pateat: ipsa Meibomii verba apponam pag. 99. *Hæc autem omnia, quæ vobis narro de rationum compositione, & de verbis, quibus illa est tradita, nunquam, inquit Euthymius, se moturum fuisse; nisi falsissimum dogma, & quod maximam errandianfam aliis præbuit, inde fuisset fabricatum. Hac enim denominatorum inter se multiplicatione fultus hic Theo Alexandrinus, Geometra aliqui eximius, quod ex Commentariis, in Ptolomæi magnam Constructionem, videre est, adseruit, triplæ rationis duplam esse sextuplam. Verba ejus supra, paginâ 25. v. 28. & pag. 26. v. 18. proposui, quæ ex commentariorum libro primo vulgatæ editionis pag. 62. sunt desumpta. Hunc secuti recentiores, volumina sua his paralogismis impleverunt. Elementa quoque tua, Euclide, ad quæ fuscè, hoc tradidit Clavius, hanc explicationem ferre sunt coacta. Eucl. Hac narratione percellor, nec quid dicam, habeo. An Theo,*



*Theo, noster Theo, dixit rationem sextuplam, esse duplam rationis triplæ? adeone rationem jam illo tempore sine ratione mathematici considerarunt? nec Græca verba tum homines intellexerunt, quibus quæ ratio alterius esset dupla, quæ tripla, & quadrupla; quæ sesquialtera esset ratio alterius rationis, & supertertia, & superquarta, & ut verbo dicam, quacunque possibili ratione alteram superans, aut ab illa deficiens. THEO. Certè cum ratione hoc adfirmasse videbor, si demonstratio mea inspiciatur: & rerum natura &c. Sed cum hæc verba Meibomii perlego insignem ipsius temeritatem, mirari satis nequeo: qui non tantum sine omni ratione aut demonstratione certa ac solida, insignes magnosque Geometras inscitæ & erroris accusare fuerit ausus, ipsisque doctissimis Græcis suæ linguæ ignorantiam objicere, ubi nullus tamen error, vel ab his, vel ab illis est commissus: verum etiam tam splendide Lectori imponere, idque de Theone Alexandrino affirmare, summæque confidentia asseverare, quod verum non esse, ipsemet omnino cognitum habebat, saltem ignorare non poterat. Equidem quibusdam mortalium, quos atra bilis commovet, id sæpissime contingere audiui, ut se solos sapere arbitrentur, cæteros mortales insanire. Quod & Marco Meibomio nunc evenire video, & optarem non evenisse. Falsissimum enim dogma appellat illud, quod omnes sapientissimi Mathematici, qui ea de re verba fecerunt, pro verissimo semper habuerunt: quodque,*  
om-

omnes homines, ratione præditi, & qui iudicium hisce de rebus ferre valent, hoc est, qui earum rerum non rudes sunt ac imperiti, de quibus sententiam rogantur, amoremque veritatis habuerint, longe verissimum esse pronunciabunt: quod denique ipsemet Meibomius, nullo unquam firmo argumento falsitatis convincere conatus est. Ita solus homo Meibomius est, reliqui volitant sicut umbræ. Sed priori capite demonstravimus, vere compositionem illam rationis, quæ sit addendo, distingvi ab illa, quæ sit multiplicando: ideoque recte omnino fecisse Geometras, qui distinctis vocibus, distinctas res appellarunt; illas quidem duplas, &c; has duplicatas: voceq; duplicata, Græcorum διπλασία optime & feliciter explicuerunt. Quod autem ait, hoc dogma, aliis maximam errandi ansam præbuisse; de eo nihil aliud dico, quàm, quod oporteret nomina istorum, qui in errorem fuere inducti, heic proposuisse: ut constaret, qui mortales essent, an rudes & rerum Mathematicarum ignari? an vero alii? Si enim Theonem inter hos positos velit, plane falsus est, ut jam dicam. Quod si vel ipse, vel alii, rudes ac imperiti rerum Geometricarum, hac in re lapsi sunt: id huic dogmati vitio verti non debet. Ipsemet enim antea didicisse debebat, quam alios docere occiperet, quæ non intelligit. Verum ista omnia in hominem cadunt. errare enim humanum est. Quod autem crimen falsi committit, idque Theoni tribuit quod non dixit,



dixit, tantum ut maledicendi ansam habeat : id vero quale sit, quivis judicet. Dicit enim, Theonem Alexandrinum rationem sextuplam vocare duplam rationis triplæ : ideoque, tùm mathematicos rationem, sine ratione, considerasse. At vero si hoc Theo dixisset, quid ea in re peccasset? Nihil fane. Sed non dixit. Verba ejus quæ ipsemet pro se citat Meibomius inspiciamus pag. 25. v. 28. & pag. 26. v. 18. Ἐπειδὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιόν ἴνῃ διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτῷ ἑξαπλάσιον, *quoniam, si triplum alicujus duplicaverimus, fiet ipsius sextuplum.* Εἰ γὰρ τὸ ἡμισὺ πνῖν τριπλασιάσωμεν, ἔξει αὐτὸ ἀπ᾽ ἡμισυαίς. *Si enim dimidium alicujus triplicaverimus, habebimus ipsum semel & dimidium.* Sed rogo te Meibomi, quia de re loquitur Theo? nonne de magnitudinibus, delineis AB. ΓΔ. EZ? Nonne hæc verba illius integra sunt. Ἐχέτω γὰρ τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ λόγον δεδομένον, οἷον διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἢ πῖνα ἄλλον, καὶ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ EZ καὶ αὐτὸ δεδομένον· λέγω ὅτι ὁ τῷ AB πρὸς τὸ EZ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΔ, καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ EZ· ἥτοι, ὅτι, ἐὰν ἡ τῷ AB πρὸς τὸ ΓΔ λόγος πηλικότης, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τῷ ΓΔ πρὸς τὸ EZ λόγος πηλικότητα, ποιῇ τὴν τῷ AB πρὸς EZ. Ἐστὼ γὰρ πρότερον, τὸ μὲν AB τῷ ΓΔ μείζον, καὶ τὸ ΓΔ τῷ EZ· καὶ ἔστω τὸ μὲν AB τῷ ΓΔ διπλάσιον, τὸ δὲ ΓΔ τῷ EZ τριπλάσιον. Ἐπεὶ ἔν τὸ μὲν ΓΔ τῷ EZ τριπλάσιόν ἐστι, τῷ δὲ

I i

ΓΔ

$\Gamma\Delta$  διπλάσιον τὸ  $AB$ , τὸ ἄρα  $AB$  τῷ  $EZ$  ἐπὶ ἑξαπλάσιον, ἐπεὶ  
 καὶ ἐὰν τὸ τριπλάσιον πινος διπλασιάσωμεν, γένηται αὐτῷ ἑξα-  
 πλάσιον. Quæ ita verto. *Habeat enim magnitudo*  $AB$   
*ad magnitudinem*  $\Gamma\Delta$  (neque enim τὸ  $AB$  & τὸ  $\Gamma\Delta$  & c. a-  
 liter explicari possunt, aut debent, qvā per τὸ μέγεθος  
 $AB$  & c.) *rationem datam*, ut duplam, vel triplam, vel  
 aliam quamcunque: & *magnitudo*  $\Gamma\Delta$  *ad magnitudinem*  
 $EZ$ . *etiam datam*: dico, quod ratio  $AB$  ad  $EZ$  componatur, ex  
 ratione  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$ , & ratione  $\Gamma\Delta$  ad  $EZ$ : vel etiam, si quan-  
 titas rationis  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  multiplicetur per quantitatem rati-  
 onis  $\Gamma\Delta$  ad  $EZ$ , quod tum faciat quantitatem rati-  
 onis  $AB$  ad  $EZ$ . Sit enim prius  $AB$  magnitudo major  
 magnitudine  $\Gamma\Delta$ , & rursus  $\Gamma\Delta$  major ipsa  $EZ$ : & sit  $AB$  qui-  
 dem dupla ipsius  $\Gamma\Delta$ :  $\Gamma\Delta$  autem tripla ipsius  $EZ$ . Quoni-  
 am ergo  $\Gamma\Delta$  tripla est ipsius  $EZ$ : ipsius autem  $\Gamma\Delta$  dupla sit  $AB$ :  
 erit ergo ipsa  $AB$  sextupla ipsius  $EZ$ . Quandoquidem si tri-  
 plum alicujus duplicemus, fit ipsius sextuplum. Nempe,  
 si triplum alicujus lineæ, vel magnitudinis duplicem-  
 mus: oritur ipsius sextuplum. Si enim  $EZ$  fuerit  
 magnitudo unius pedis;  $\Gamma\Delta$  autem trium pedum: si  
 dupletur  $\Gamma\Delta$ , hoc est, si  $AB$  constituatur dupla ipsius  $\Gamma\Delta$ ,  
 erit  $AB$  sex pedum: adeoque sextupla ipsius  $EZ$ . Quæ  
 sane vera sunt ac longe certissima. Non tamen ideo  
 dicit rationem  $AB$  ad  $EZ$ , esse duplam rationis  $\Gamma\Delta$  ad  $EZ$ .  
 Hoc ergo est purum figmentum Meibomii. Aliud  
 enim est, dicere, magnitudinem, qvæ triplæ dupla  
 est, simplicis esse sextuplam: & aliud, rationem sex-  
 tuplam esse duplam triplæ. Vera quidem utraque  
 asser-



assertio, sicut superiore capite probavimus. Ideoque, si id dixisset Theo Alexandrinus, nullo modo errasset: neque jure, vel à Meibomio, vel ab ullo alio carpi aut accusari posset. Sed id hoc loco non dicit: adeoque falsus est Meibomius, qui id eum heic dicere asseverat. Non enim de rationibus hoc pronunciat Theo, sed de magnitudinibus. Verum hic quidem error Meibomii utcumque tolerandus foret: quandoquidem nullius erroris ipsum Theonem inde convincere possit. At quem alibi eidem Theoni intentat, majori diligentia erit refutandus; cum earum rerum ignorantiam Theoni objiciat, quas optime is cognitas habebat. Dicit enim Theonem non cognitam habuisse compositionem rationum ineffabilium: sed quod Euclides, in genere de omnibus rationibus proposuerat, id Theonem de solis effabilibus explicuisse, adeoque pro voce *πυλινότης*, qua Euclides usus est, aliam nempe *πρότης* supposuisse. Verba ejus pag. 89. sub persona Euclidis & Hermotimi prolata adscribam integra. EUCL. *Hæc non sine admiratione quadam Hermotime te narrantem audio. Haud putassem, tantum obscuritatis interpretibus præbiturum fuisse vocabulum *πυλινότης*, quod sane eo sensu, quo rectè explicavit Euthymius ab omni antiquitate est usurpatum. Nimirum ex Græcæ literaturæ in Græcis disciplinis cognoscendis, neglecta cultura, quid non ubique errorum est enatum.* HERMOT. *Majore cum admiratione me de altera definitione differentem audies. Nam & clari*

Ii 2

Mathe-

*Mathematici, & Græci reprehensionem incurrant, quorum duos ne ignotos accersam & obscuros, hîc præsentes vides Eutocium dico & Theonem. Diserte enim uterque per rationis  $\pi\lambda\iota\kappa\acute{o}\tau\eta\varsigma$  quantitatem, te intelligere dicit  $\pi\acute{o}\tau\eta\varsigma$  quotitatem, seu ut ipsi loquuntur numerum denominatorem, à quo ratio denominatur, quod, quale sit superius narravi. Sed ut cætera Meibomii intacta relinqvam, id tantum urgebo, quod disertè Theonem & Eutocium dicere ait, nempe Euclidem per  $\pi\lambda\iota\kappa\acute{o}\tau\eta\varsigma$  λόγῳ intelligere  $\pi\acute{o}\tau\eta\varsigma$ , vel ut ipsi loquuntur numerum denominatorem. Ajo autem id nusquam Theonem, Eutociumve dicere: sed nudam & simplicem calumniam esse Meibomii. Neque enim verba, quæ vel ex Theone, vel ex Eutocio ipsemet exscripsit, quicquam tale demonstrant. Quod si dixerit, id tamen inde concludi: ajo eum pessime argumentari, & quod majus est, vel Theonem Eutociumve non intellexisse, vel pessima ac plane sublesta fide usum fuisse. Quod ut demonstretur, primum quidem proponam, quid voces  $\pi\acute{o}\tau\eta\varsigma$  &  $\pi\lambda\iota\kappa\acute{o}\tau\eta\varsigma$  Græcis Geometris ac Philosophis significant. Inde, eodem plane sensu has voces Theoni & Eutocio usurpatas. Denique, ea omnia optime eos intelligere, & accurate explicare, ob quæ eos reprehendit Meibomius: adeoque hunc vel eos non intelligere, vel pessima fide agere; quod sciens vidensq; bonis auctoribus errorem objiciat, quem non commiserunt. Voces ergo  $\pi\acute{o}\tau\eta\varsigma$  &  $\pi\acute{o}\tau\eta\varsigma$  denotant omne quantum finitum & mensurabile, tam quod ad mag-*



magnitudinem, quam quod ad numerum, & ad pondus refertur. Πηλίκον vero & πηλικότης solis quidem magnitudinibus conveniunt, denotant autem omnem magnitudinem, tam commensurabilem alteri, quam incommensurabilem. De utroque veterum testimonia audienda. Nemo enim Græcam linguam rectius explicuerit, quam ex ipsis veteribus Græcis, consensuque eorum circa voces. Primus ergo & antiquissimus testis sit nobis Archytas Tarentinus celeberrimus ille Pythagoræus, cujus verba apud Simplicium in Categoriis hæc sunt. Ταῖς ποσότησι διαφοραῖς τρεῖς. Τὸ μὲν γὰρ αὐτὰς ἐντὶ ἐν ῥοπᾷ, ὡς τὸ τέλειαν. τὸ δὲ ἐν μεγέθει ὡς τὸ δίπαχυ· τὸ δὲ ἐν πλάτει ὡς τὰ δέχα. *Quantitatis differentie tres. Quædam enim quantitas in pondere consistit, ut talentum: quædam vero in magnitudine, ut bicupitale: quædam vero in multitudine, ut decem.* Aristoteles quoque diligens & in verbis perquam accuratus scriptor voce ποσῆς, tam continuum quam discretum quantum comprehendit. In Categoriis. Τῆς δὲ ποσῆς, τὸ μὲν ἔστι διωρισμένον, τὸ δὲ συνεχές. *Quantitatis τῆς ποσῆς una species est discreta, altera continua.* Ad quem locum egregie Simplicius. Ἐγκαλῶσι δὲ οἱ περὶ τὸν Λέκκιον καὶ Νικόστρατον τῇ διαφέσει πρῶτον μὲν, ὡς μὴ δεόντως καὶ τὸ μέγεθος ποσὸν λεγέσθαι πηλίκον γὰρ ἔδει τῆς λέγειν, ποσὸν δὲ τὸν ἀριθμὸν, τὸ δὲ κοινὸν ἢ ἀλλόπι, ἢ ὁμονύμως τῶ ἐν τῶν εἰδῶν, ποσὸν καὶ αὐτὸ ὀνομάζειν.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ πλεῖστον, τὸ μὲν συνεχές, πηλίκον, τὸ δὲ διωρισμένον, ποσόν, ἀλλὰ καὶ ὑπαλλάττει πολλάκις (τὸ γὰρ ὕδωρ, συνεχές ὄν, ποσὸν λέγομεν, ἀλλ' ἔτι πηλίκον· πολὺ γάρ, καὶ ὀλίγον· καὶ τὸν χρόνον ποσὸν λέγομεν) εἰκότως ἔτε δύο πεποίηκε κατηγορίας, τὸ ποσόν, καὶ τὸ πηλίκον, ἔτε καὶ τὸ πηλίκον καὶ ποσὸν διείλιν, ἀλλὰ καὶ τὸ συνεχές καὶ τὸ διωρισμένον, ἀπερ' ἐδέποιο ὑπαλλάττει. *Accusant vero sectatores Lucii & Nicostrati hanc divisionem, primum quidem, quod non convenienter magnitudinem ποσὸν vocet: oportebat enim hanc quidem appellare πηλίκον, numerum vero ποσὸν: commune autem, vel alio quocunque nomine, vel æquivocè tantum, seu quod uni solùm speciei propriè conveniret, etiam ποσὸν nominasse. Sed quandoquidem πηλίκον & ποσὸν, quamvis ut plurimum, illud quidem continuæ quantitatì, hoc autem discretæ tribuatur; sæpius tamen subalternantur: (aquam enim quantitatem continuam ποσὸν dicimus, & non πηλίκον, quippe multam non magnam, & tempus ποσὸν vocamus) rectè quidem, neque duo distincta prædicamenta fecit ποσὸν & πηλίκον, quotum & quantum; neque quantitatem juxta ποσὸν & πηλίκον divisit, sed juxta continuum & discretum: utpote quæ nunquam subalternantur. Ex quibus liquet male à Meibomio voces hasce explicari pag. 11. linea 3. Verba ejus hæc sunt. Differunt enim Mathematicis τὸ πηλίκον & τὸ ποσόν, quod τὸ πηλίκον ad quantitatem, seu potius quotitatem continuam referatur. τὸ ποσόν ad discretam. Neque enim τὸ ποσόν ad solam discretam quantita-*



titatem refertur, sed etiam ad continuam; neque  
 πηλικότης qvotitatem proprie magnitudinum exprimit,  
 id enim τὸ ποσὸν facit: sed qvamcunque magnitudinem  
 indicat, sive cognita sit, sive incognita. Videtur qvidē  
 Nicomachus Gerasenus libro I. Arithmetices hanc  
 Meibomii sententiam aliquo modo approbare. Post-  
 quam enim quantitatem in continuam & discretam  
 tribuerat, hæc verba subjungit, qvæ etiam Meibo-  
 mius adducit. Φαίνεται δὲ, ὅτι ἔτε περὶ ἀπλῶς μέγεθος,  
 ἔτε περὶ ἀπλῶς πλῆθος συστάη ἀν πότε ἡ ἐπισήμη ἀδει-  
 σον γὰρ ἐχάτερον καθ' ἐαυτὸ βῆσι, πλῆθος μὲν ὅτι το πλεῖον,  
 μέγεθος δὲ ὅτι τὸ ἐλάχιστον ἀλλὰ περὶ π' ἀπ' ἀμφοῖν ἀφο-  
 ρισμένον ὡς μὲν πλῆθος περὶ τὸ ποσόν, ὡς δὲ μέγεθος περὶ  
 τὸ πηλικόν. Apparet igitur, qvoad scientia neque circa  
 magnitudinem simpliciter, neque circa multitudinem  
 versetur: utrumq; enim per se indefinitum; multitudo  
 qvidem, qvoad plus; magnitudo vero qvoad minus: sed  
 circa aliquid ab utroque abstractum: nempe circa qvo-  
 tum τὸ ποσόν, à multitudine: circa qvantum vero τὸ πηλικόν,  
 à magnitudine. Sed non potest auctoritas uniūs Græ-  
 ci, qvique jam senescente lingua Græca scripsit, alius  
 pluribus optimi ævi scriptoribus præferri, apud quos,  
 vox ποσὸς non tantum discretæ, sed etiam continuæ  
 qvantitati tribuitur. Ut taceam, verba Nicomachi,  
 talem explicationem posse admittere, quæ cum alio-  
 rum Græcorum mente conveniat. Aquam quidem,  
 qva, nihil magis continuum esse, omnes norunt, non  
 ad

ad μέγεθος, sed ad πλῆθος Græci referunt. Tempus quoque continuum esse quantitatem satis liquet: & tamen ab optimis auctoribus ποσὶν vocatur. Apud Aristophanem in Acharnensibus. Ποσὶ δὲ τὸν πρῶτον χρόνον ξυνήγαγεν. *Quanto tempore exercitum collegit.* & apud Homerum Patrem linguæ Græcæ, ποσῆμαρ μέμονας κτερεῖζέμεν Ἐλώεα δῖον ad quæ verba Eustathius ποσῆμαρ, ἥτοι πόσας ἡμέρας. Sed & de magnitudine, adeoque quantitate continua proprie dicta usurpatur apud Aristotelem in Problematibus, Sectione quinta Quæstione XXV. Διά τι πλεῖον δοκεῖ ἡ ὁδὸς εἶναι ὅταν μὴ εἰδότες, βαδίζωμεν, πόση τις, ἢ ὅταν εἰδότες. *Quare via longior appareat, cum ignari quanta sit, ambulamus, quàm cum gnari?* causas autem reddit ἡ ὅτι τὸ εἰδέναι πόσιν, τὸ εἰδέναι ὅτι τ' αἰεθμὸν αὐτῶν. καὶ πλεῖον αἰετὸν ἀόριστον ὃ ὠρισμένον. *An quod nosse quanta sit, id sit nosse ipsius numerum? Indeterminatum autem semper majus appareat determinato.* & paulo post. ἐπὶ τὸ ποσὸν ὠρισμένον, καὶ τὸ ὠρισμένον ποσόν. *Præterea omne ποσὸν est determinatum, & omne determinatum ποσόν.* Quæ verba Aristotelis optime declarant quid τὸ ποσὸν sit? nempe omne quantum determinatum, sive sit continuum, sive discretum. Viam enim quamcunque in longitudinem mensuratum, ad quantitatem continuum referri, nemo ignorat. Hæc ergo optime explicant, quid voces ποσὸν & ποσότης  
ip[s]is



ipsis veteribus Græcis Philosophis significant, nempe ut antea dixi, omne quantum determinatum, sive sit continuum, sive discretum. De voce autem *πηλικότης* insignis est locus Ptolemæi, ut alios auctores præteream, qui à Meibomio citantur, eandemque planè sententiam habent, quam Ptolemæus. Quod enim Nicomachus Gerasenus nonnihil dissentire videatur: id tanti non est. Integrum autem Ptolemei locum apponam, quamvis longior sit, ut eo melius vis verbi intelligatur. Extat autem lib. I. Magnæ Syntaxeos capite *περὶ τῆς πηλικότητος ὅτι ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν*. De *quantitate rectarum circulo inscriptarum*, ad cuius meliorem intellectum ultima verba prioris capitis etiam exscripsimus. Μέλλοντες δὲ ἀρχεῖν τῶν κατὰ μέρος ἀποδείξεων, ὧν πρώτην ἔσται ἀρχὴν ἡ γένεσις, δι' ἧς ἡ μετὰ τῶν περιττῶν πόλων περιφέρεια, ἥτις ἀπὸ τῶν γεγραμμένων μεγίστη κύκλος πηλική τις ἔσται, κατὰ λαμβάνειν, ἀναγκαῖον ὁρώμεν προθέσθαι τὴν παραγμείαν τῆς πηλικότητος, τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν, ἅπασι γε μελλήσοντες ἕκαστα γεωμετρικῶς ἀποδεικνύειν. Πρὸς μὲν δὲ τὴν ἐξ ἐτοίμου χρῆσιν, καὶ νομικὴν τινὰ μετὰ ταῦτα ἔκθεσιν ποιησόμεθα τῆς πηλικότητος ἀπὸ τῶν, τὴν μὲν περιμέτρον εἰς τὴν διελόντες τμήματα· ὧν ἀπὸ τῶν δὲ ταῖς κατὰ ἡμιμέτρον ὧν ἀπὸ τῶν περὶ τῶν περιφερειῶν ἑπορευόμενας εὐθείας, τὴν ποσὴν εἰσὶ τμημάτων, ὡς τὴν ἀφ' ἑαυτῆς, ἀφ' ἧς τὸ ἐξ αὐτῶν τῶν ἐπιλογισμῶν φανησόμενον ἐν τοῖς ἀριθμοῖς εὐχρηστον εἰς

Kk

ρ'κ

ῥα τμήματα διηρημένης. Sed cum animus nobis sit par-  
 ticulares demonstrationes incipere, quarum primam exi-  
 stimamus eam esse, per quam circumferentia, quæ est in-  
 ter prædictos polos, quæque maximi circuli, qui per  
 prædictos polos describitur, pars quantacunque est, cog-  
 noscitur: necessariam arbitramur modum cognoscendi  
<sup>πηλικότητος</sup> quantitates rectarum circulo inscriptarum  
 primum exponere: singula quidem in lineis demonstra-  
 turi. Ad usum ergo commodiorem, per tabulas quas-  
 dam, <sup>πηλικότητι</sup> quantitatem illarum exposuimus, ipsam  
 quidem circuli peripheriam in partes CCCLX secantes:  
 augmentis vero peripheriarum ad singulos graduum se-  
 missis, apponentes rectarum, quæ ipsas subtendunt quan-  
 titates, hoc est, quot earum partium sunt, quarum dia-  
 meter circuli, propter maximam in numeris commodita-  
 tem, ( ut ex sequentibus rationibus fiet manifestum )  
 in se habet C & XX. In verbis istis Ὡς αὐθέντες δὲ ταῖς  
 καὶ ἡμιμύριον παραυξήσεις τῶν περιφερείων ὑπολεινομένας  
 εὐθείας, τέτρε πόσων εἰσὶ τμημάτων quædam desiderari  
 videntur. Vix enim commodum sensum habent.  
 Explerem ita ex Theonis commentario, verbis parum  
 immutatis, Ὡς αὐθέντες δὲ ταῖς καὶ ἡμιμύριον παραυξή-  
 σεσι τὰς ὑπολεινομένας εὐθείας, vel plenius ταῖς τῶν ὑπολει-  
 νομένων εὐθειῶν πηλικότητις, τέτρε πόσων εἰσὶ τμημάτων.  
 Atque ita quidem verti. Id certum est πηλικότητις  
 τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν quantitates rectarum circulo in-  
 scrip-



scriptarum, rectè, secundum mentem Ptolemæi, explicari per πόσων εἰσὶ τμημάτων *quot sint partium*. Ipse enim Ptolemæus, qui hoc capite *πηλικότητις* seu quantitates, rectarum quarumcunque, circulo inscriptarum, vult demonstrare, primum quidem docet, quot partium sit subtenfa sexaginta graduum, seu latus hexagoni circulo inscripti: inde quot partium latus sit quadrati circulo inscripti, seu subtenfa graduum nonaginta: postea quot partium sit latus pentagoni, seu subtenfa graduum LXXII. & denique latus decagoni seu subtenfa graduum XXXVI. Unde liquet, demonstrare *πηλικότητις* rectarum circulo inscriptarum, idem esse Ptolemæo, ac monstrare, πόσων εἰσὶ τμημάτων *quot talium sit partium*, qualium diameter est CXX. Quod ipsum, ex iis, quæ, ad finem hujus capituli, dicuntur, exque adjunctis tabulis, fit manifestum: unde, & ea heic annotavi, ut constaret, quid, veteres Mathematici, per *πηλικότητα*, intellexerint. Ἴνα δὲ, ὥς ἔφην, ἐφ' ἐκάστης τῆς χρειῶν, ἐξ ἐτόιμυ, τὰς πηλικότητας ἔχμεν τῶν εὐθειῶν ἐκκειμένων, καὶ ὧν αὐτὰς ἀποτέλλομεν ἀνά τιχὸς μέτρησιν, τὸ σύμμετρον, ὧν, τὰ μὲν πρῶτα μέρη, περιέχει τὰς πηλικότητας, τὰ περιφερείων, καὶ ἡμιμακρον παρηυξημένας: τὰ δὲ δεύτερα, τὰς τῶν ἀποκειμένων τῶν περιφερείων εὐθειῶν πηλικότητας, ὡς τῆς διαμέτρου, τῆς ἐκ τμημάτων ἀποκειμένης: τὰ δὲ τρίτα, τὸ τριακσὸν μέρος, τῆς καὶ ἑκάστον ἡμιμακρον τῆς εὐθει-

εὐθειῶν παραυξήσεως, ἵνα ἔχοντες τὴν τῷ ἐνὸς ἑξακοσιῶν μέ-  
σῃ ἐπιβολῇ, ἀδιαφορῶσαν πρὸς αἰοδησὺν τῆς ἀκρίβειας,  
καὶ τὴν μετὰ ξυτῶν ἡμίσεος μερῶν, ἐξ ἐτοίμου, πᾶς ἐπιβάλλουσας  
πυλινότητας, ἐπιλογίζεσθαι δυνώμεθα. *Ut vero, ad  
quemcunque usum, paratas, ut dixi, quantitates  
πυλινότητος rectarum habeamus: tabulas, versuum  
XLV, singulas, propter mensuræ commoditatem confe-  
cimus, quarum, primus ordo exhibet quantitates  
πυλινότητος peripheriarum, quæ ad dimidium cuiusque  
gradus augentur: alter vero, adjacentium, peripheriis,  
rectarum, quantitates πυλινότητος, in tot partibus, quot  
diameter, CXX habere supponitur: tertius vero ordo,  
tricesimam partem augmenti rectarum ad quosvis di-  
midios gradus, ut dato unius sexagesimæ partis excessu  
medio, qui quidem, à vero seu accurato, quoad sensum,  
non differt; & cæterarum partium, quæ inter semissem  
gradus continentur, excedentes quantitates, sine labore  
sumere liceat.* Subjungitur his tabula, cuius fragmen-  
tum apposuimus.

I.	II			III			
Παραυξ'	Εὐθειῶν			Ἑξακοσιῶν			
ς'	ς	λ α'	κε	ς	α	β	ν
α	α	β	ν	ς	α	β	ν
α. ς'	α	λ δ	ι ε	ς	α	β	ν
β	β	ε	μ	ς	α	β	ν
β. ς	β	λ ζ	δ	ς	α	β	μη
λς'	λζ	δ	νε	ς	ς	νθ	νζ



Prima tabula exhibet, τὰς περιμέτρους καὶ ἡμιμέτρους τῶν ὀρθογώνιων, quantitates περιμέτρων ad dimidium auctas. Est ergo & dimidius gradus, & unus, & duo, & tres, & sic porro ad 360 gradus περιμέτρους quædam τῆς περιφέρειας, sive circumferentiæ circuli: Περιμέτρους quoque rectæ lineæ, circulo inscriptæ, quæ unum gradum subtendit, est partium 1 - 2'. 50' qualium Diameter circuli est 120. Unde, si quærat quantitas, seu περιμέτρους lateris decagoni circulo inscripti, quod quidem latus subtendit semper gradus circuli XXXVI, dico esse partium 37. 4'. 55'. talium, qualium diameter circuli, est 120. Recte ergo περιμέτρους, in magnitudinibus datis, explicatur per πόσων εἰς τμήματων quot sint partium. Et demonstrare magnitudinis cuiusdam περιμέτρου, est monstrare πόσων εἰς τμήματων quot partium sit. Sic demonstrare, περιμέτρου magnitudinis decempedalis, est, demonstrare, quot sit pedum, nempe decem: quod sane, non minus rectè, dicitur, demonstrare ipsius πόσων seu ποσότητα. Adeoque omnis περιμέτρους cognoscitur per το πόσων seu τὴν ποσότητα. Sic magnitudo AB, in figura num. V. hujus libri, habet quidem suam περιμέτρου, sed incompertam. Ubi vero ποσότητα ipsius cognoverim, hoc est, πόσων τμήματων ὅστις πόσων ποδῶν, ἢ πηχεων, ἢ σταδίων quot partium sit, nempe quot pedum aut cubitorum, aut stadiorum: jam ipsam quoque περιμέτρου ipsius cognitam habeo. In omni ergo magnitudine, est περιμέτρους

K k 3

quæ;

quæ tamē non determinatur, nisi per ποσότητα. Itā docet Ptolemæus, quod καὶ μὴ πρὸς τὸ χεθ' ὅλα δύνεται, τὰς πηλικότηας ὀρίζειν, ἐπὶ γὰρ τῶν ἑταῶς ἐλαχίστων, τὸ πρὸς τὰς ὤρισμένας ἀπαράλλακτον δύναι' ἀν συνίηρεῖν, *quamis πηλικότητις quantitates tam exilium præsertim partium, vix quisquam accurate definiverit: nihilo tamen minus, possit illud observari, quod nulla sensibili differentia à definitis distet.* Ubi rursus ὀρίζειν τὰς πηλικότηας est ipso-  
 forum ποσὸν exhibere, seu πόσων εἰσὶ τμημάτων. In quibus, vero, id, præstari nequeat, nec τὸ ποσὸν accuratè inveniri, ibi neque τὰς πηλικότηας χεθ' ὅλα ὀρίζειν δύνεται, *absolute quisquam determinare potest.* Πηλικότης ergo juxta hæc denotat omnem quidem finitam magnitudinem, tam illam, quæ cognosci & explicari potest, quàm, quæ non potest. Illa autem πηλικότης cognoscitur, cujus τὸ ποσὸν seu ποσότης habetur, & de qua dici potest πόσων εἰσὶ τμημάτων, *quot sit partium.* Illa autem πηλικότης, de qua id dici nequit, & cujus ποσότης cognita non est, neque cognoscitur, neque verbis explicatur. Idipsum, quod in magnitudinibus ita demonstravimus, etiam in ipsis rationibus verum est. Quæ enim ratio, inter magnitudines incommensurabiles, fuerit, habet quidem πηλικότητα, & aliquam quantitatem, sed incompertam. Quæ autem est inter magnitudines commensurabiles, & ποσότητα habet, & πηλικότητα. Scholium Euclidis à Dasypodio editum, cujus



cujus & Meibomius meminit. Ἐπὶ μὲν τῶν ἀριθμῶν πᾶς λόγος ῥητὸν ἔχει ποσότητα· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν, ὅτε τις λόγος, ὅς ἐστι δύναμις ῥητὸν ἀριθμῶν. Ἐστὶ γὰρ πᾶν ὧν μόνη μὲν γινώσκεται, ἢ πρὸς τὸ ἕτερον ὑπεροχῇ, ἢ δὲ ποσότης ὅτιν ἄγνωτος. Ταῦτα ποιοῦν λόγον λέγεσθαι ἔχοντός ὑπεροχῆς, ἔχει δὲ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, τῷ τε ῥητόν. Καὶ διὰ τὸ πρὸς ῥητόν· ἐν τῷ ὁρισμῷ τῷ λόγῳ τῶν μεγεθῶν, τὸ κατὰ πηλικότητα. ὁ μὲν γὰρ ῥητός, καὶ κατὰ πηλικότητα, καὶ κατὰ ποσότητα ὅτιν· ὁ δὲ πάντως δὲ ὁ κατὰ πηλικότητα καὶ ῥητός. *In numeris quidem, omnis ratio, quantitatem effabilem, habet: in magnitudinibus verò, ratio quædam est, quæ numeris explicari nequit. Sunt enim quædam magnitudines, quarum solus excessus cognoscitur: quantitas vero ignota est. Hæ ergo rationem habere dicuntur excessus, non vero, quæ numerus ad numerum, hoc est effabilem. Et propter hoc, etiam in definitione rationis magnitudinum, adprossit, κατὰ πηλικότητα. Effabilis enim ratio ἢ est κατὰ πηλικότητα & κατὰ ποσότητα: sed non omnis ratio quæ est κατὰ πηλικότητα etiam est effabilis.* Verum ergo illud est, quod antea dixi, ποσότητα & πηλικότητα hoc differre, quòd ποσότης omne quantum, quod certam & cognitam mensuram habet, sub se comprehendat: πηλικότης verò, solam magnitudinem. Rursum, πηλικότης omni finitæ magnitudini convenit: ποσότης, tantum determinatæ & effabili. Atq; hæc communis Geometrarum veterum sententia, quam nec Meibomius falsi arguere potest, imo ipsemet sequi videtur pag. 86. circa finem, quamvis antea

pag.

pag. nempe undecima, ποσὸν soli discretæ quantitati tribuerit, ut antea indicavimus. Quoniam ergò, vel ipso Meibomio fatente, ποσότης omne quantum determinatum significet, sive continuum sit, sive discretum; *πηλικότης* vero solam magnitudinem, eamque tam determinatam, quam ineffabilem: non illi male Euclidem explicasse, aut voces *πηλικότητος* & *ποσότητος* confudisse sunt dicendi, qui cognitæ & determinatæ *πηλικότητι*, *ποσότητι* tribuunt: & tamen nihilo secius quascunque rationes, tam, quarum ποσὸν datur, quam, quarum το *πηλικόν* tantum, rectè componunt. Ait quidem Meibomius, diserte, & Theonem & Eutocium asserere, Euclidem per *πηλικότητι λόγῳ* intellexisse ποσότητι: sed nusquam id probat. Imo plane falsum est. Nusquam enim illa verba, vel apud Theonem, vel Eutocium invenies. Quin potius Theo, commentario in locum illum Ptolemæi, quem antea laudavimus, voce *πηλικότης* sæpius utitur, semper eodem modo quo Ptolemæus, nempe pro quantitate rectarum circulo inscriptarum, aliarumve magnitudinum, tam numero explicata, quam ineffabili. Προαποδείξας ὅτι τὰς ὑποτεινουσῶν τὰς ἐξηγμένας περιφερείας εὐθειῶν *πηλικότητας*. *Postquam vero demonstravit quantitates rectarum, quæ dictas peripherias subtendunt.* Et sæpius eodem modo, per totum illud caput. Nec demonstrari potest, Theonem, voce *πηλικότης*, multitudinem designasse: multo minus, numerum denominatorem, quod ait Meibomius. Si enim, vel Theo, vel Eutocius *πηλικότητι* eo modo



modo explicasset: utique, neuter eas rationes composuisset, in quibus τὸ πρὸν ignoratur, sola πηλικέτης datur. At id fecisse eos, certum est. Neque enim solas effabiles rationes, hoc est, quarum τὸ πρὸν datur, composuere; sed etiam ineffabiles, & quascunque. Verum quidē est, effabiles eas rationes secundum ποσότητα componere docuisse; quod etiam iis verbis indicant, quæ Meibomius passim citat: cum omnis cognita πηλικέτης per ποσότητα explicetur. Non tamen ideo πηλικέτη & ποσότητα confuderunt, neque in verbis Euclideis unam vocem pro alia intellexerunt, nempe pro πηλικέτης ποσότης: quandoquidem, & eas rationes componunt, quæ nullam habent ποσότητα, sed solam πηλικέτητα. Id ex Theone clarissimum est: ut mirari satis nequeam, Meibomium, qui eam ex Theone paginam laudavit, & quædam his interspersa recitavit, vel mala fide hæc dissimulasse; vel Theonem non intellexisse, tam clare de his differentem. Neque enim affirmare velim, hæc non eum legisse: quandoquidem hanc eandem paginam recitet: & supina, ne quid dicam gravius, negligentia sit, locum quendam ex scriptore adducere, & connexionem textus, secundum antecedentia & consequentia non observare: & quod pessimum est, optimum scriptorem ignorantia arguere, earum rerum, quas eodem loco, quem præ manibus habeo, accuratissime tradit. Si enim Theo Euclidem ita explicuisset, ut in definitione compositionis rationum, per πηλικέτητα intellexisset numerum denominatorem:

Ll

utique

utique, nullam aliam compositionem rationum agnovisset, quam illam, quæ fit per numerum denominatorem: adeoque, nunquam rationes ineffabiles, in quibus nullus numerus denominator est, vel ipsemet composuisset, vel alios componere docuisset. Id ipsum de Eutocio dicendum est. At uterque, rationes quascunque non tantum effabiles, sed etiam ineffabiles, componi invicem posse noverat: adeoque, per *πληρότητα*, non numerum denominatorem, sed quantitatem, tam cuius *ποσότης* datur, quam cuius non datur, intellexit. De Theone res clara est. Eodem enim in loco ubi earum rationum compositionem tradit, quarum *ποσότης* datur; etiam illam adducit, quarum *ποσότης* non datur. Methodum enim generalem proponit Theon, quæ non minus ineffabiliū quā effabiliū rationū, tam compositioni, quam divisioni inservit: quæ quidem methodus, longe facilior, & magis expedita est illa quam Meibomius tam operose tradit pagina 93. 99. Quod ut clarius pateat, ipsum Theonem loquentem audiamus, commentario in primum librum magnæ Syntaxeos Ptolomæi pag. 62 63. "Ἰνα δὲ ἐπὶ κατὰ μέρος γένηται τὸ τῆς συνθέσεως τῶν λόγων, διήχθω ἡ ΓΔ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κείῳ ἴση τῇ ΔΖ, καὶ συμπληρώσω τὸ ΛΓ ὡς ἀλληλόγραμμοι. Καί ἐπει, ὅ τῆς ΚΓ ὡς ἀλληλόγραμμος πρὸς τὸ ΚΘ λόγος, ὁ αὐτὸς ὅτι τῷ τῆς ΓΔ εὐθείας πρὸς τὴν ΔΘ. ὁ δὲ τῷ ΓΚ, πρὸς ΚΘ λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λοιπῶν, τέττιν, ἔκπε τῷ ὃν ἔχει ἡ ΓΔ



$\Gamma\Delta$  πρὸς  $\Delta\kappa$  καὶ ἡ  $\kappa\Delta$  πρὸς  $\Delta\Theta$  (πὰρὰ ῥῖσιν ὁμοιᾶν ἀλλή-  
 λόγραμμά λόγον ἔχει πρὸς ἀλλήλα τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν  
 πλευρῶν) καὶ ὁ τῆς  $\Gamma\Delta$  ἄρα πρὸς  $\Delta\Theta$  λόγος σύγκειται ἔκ τε  
 τῆς  $\Gamma\Delta$  πρὸς  $\Delta\kappa$ , καὶ τῆς  $\kappa\Delta$  πρὸς  $\Delta\Theta$ . Ἀλλ' ἡ μὲν  
 $\Delta\kappa$  τῇ  $\Delta\zeta$  ὅτι ἴση· ἡ δὲ  $\Delta\Theta$  τῇ  $\zeta\epsilon$ . Ὁ ἄρα τῆς  $\Gamma\Delta$  πρὸς  
 $\epsilon\zeta$  λόγος, τῶν  $\Gamma\Delta$ , ὁ τῆς  $\Gamma\Delta$ , πρὸς  $\Delta\epsilon$ , σύγκειται ἔκ τε τῆς  
 $\Gamma\Delta$  πρὸς  $\Delta\zeta$ , καὶ τῆς  $\Delta\zeta$  πρὸς  $\epsilon\zeta$ , τετέστι τὸ  $\zeta\beta$  πρὸς  $\beta\epsilon$ .  
*Ut verò manifestum fiat, id quod de compositione rationum  
 proponitur, educatur in figura numero XV. hujus libri*  
 $\Gamma\Delta$  in  $\Theta$ , & fiat  $\Delta\Theta$  æqualis ipsi  $\epsilon\zeta$ . Super  $\Delta$  vero pun-  
 ctum erigatur perpendicularis ipsi  $\Gamma\Theta$ , recta  $\Delta\kappa$ , & fiat  
 æqualis ipsi  $\Delta\zeta$ . Claudatur parallelogrammum  $\Delta\Gamma$ : &  
 quandoquidem, ratio parallelogrammi  $\kappa\Gamma$ , ad parallelo-  
 grammum  $\kappa\Theta$ , eadem est, quæ rectæ  $\Gamma\Delta$ , ad rectam  $\Delta\Theta$ ;  
 per I. propof: VI. Elem. ratio autem  $\zeta\kappa$  parallelogram-  
 mi ad parallelogrammum  $\kappa\Theta$ , componitur ex reliquis, hoc  
 est, ex ratione, quam habet  $\Gamma\Delta$  ad  $\Delta\kappa$ , &  $\kappa\Delta$  ad  $\Delta\Theta$ . (Æ-  
 quiangula enim parallelogramma, rationem habent invi-  
 cem ex lateribus compositam) per XXIII. VI. Elem.  
 ratio ergo  $\Gamma\Delta$  ad  $\Delta\Theta$  componitur ex ratione  $\Gamma\Delta$  ad  $\Delta\kappa$ , &  
 $\Delta\kappa$  ad  $\Delta\Theta$ . Sed  $\Delta\kappa$  æquatur ipsi  $\Delta\zeta$ , &  $\Delta\Theta$  æquatur ipsi  
 $\zeta\epsilon$ . Ratio ergo  $\Gamma\Delta$  ad  $\zeta\epsilon$ , hoc est,  $\Gamma\Delta$  ad  $\Delta\epsilon$ , componitur  
 ex ea, quam habet  $\Gamma\Delta$  ad  $\Delta\zeta$ , &  $\Delta\zeta$  ad  $\epsilon\zeta$ , hoc est,  $\zeta\beta$  ad  
 $\beta\epsilon$ . Ex his clarum, Theonem Alexandrinum ratio-  
 nes composuisse, non tantum per numeros, quod po-  
 stea facit; sed etiam in lineis: neque solas effabiles,  
 sed etiam ineffabiles. Sit enim in figura num XVI.

Ll 2

qua-

quadratum ABCD, cuius diagonalis AC, latus AB. Sit porro aliud quadratum AEF G, cuius diagonalis sit AF æqualis AB lateri quadrati ABCD. Erit ergo ut AC ad AB, sic AF, hoc est, AB, ad AE. Est autem utraque ratio, & AC ad AB, & AB, seu AF, ad AE ineffabilis. In quadratis enim figuris diameter lateri est incommensurabilis per CXVII. Propositionem libri X. Elementor. Et tamen, duæ hæ rationes, methodo jam à Theone proposita, invicem componuntur. Construatur enim CA AB parallelogrammum rectangulum, ipsique CA, in directum jaceat AE: clausoque parallelogrammo in F, sit ut BC parallelogrammum, ad AF parallelogrammum; sic basis AC ad basin AE: per I sexti Element. At BC parallelogrammum, ad AF parallelogrammum habet rationem compositam, ex ratione AC ad AB, & ratione AB ad AE. Ergo & AC ad AE, habet rationem compositam ex ratione AC ad AB, & ratione AB ad AE: hoc est, ratio AC ad AE est composita ex binis rationibus ineffabilibus AC ad AB, & AB ad AE.

Sed ut clarius pateat, utriusque generis, rationes, juxta Theonis methodum componi posse: ea, quæ, paulo post proponit, paginâ 36. adducemus. λέγω δὴ πάλιν, ὅτι καὶ ἐν ταῦτα, καθόλου, ὅτι τῆς τοιαύτης τάξεως ἡ δέξις ὁρίζεται· καὶ ὁρῶν, ὅτι ὁ τῆς BZ πρὸς ZE λόγος σύγκειται ἐκ τῆς τῆς BΔ πρὸς ΔΑ, καὶ τῆς τῆς ΑΓ πρὸς ΓΕ. "Ηχθω γὰρ ἀφ' τῆς Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΘ· καὶ



καὶ διὰ τὴν  $BE$  ἐπὶ τὸ  $\Theta$ . ἐπεὶ ὅτι τῆς  $BZ$  πρὸς  $ZE$  λόγος, τῆς  $Z\Theta$  ἑξωθεν λαμβανομένης, σύγκειται ἕκτε τῆς  $BZ$  πρὸς  $Z\Theta$ , καὶ τῆς  $\Theta Z$ , πρὸς  $ZE$ . ἀλλὰ τῷ μὲν τῆς  $BZ$  πρὸς  $Z\Theta$  λόγῳ, ὁ αὐτὸς ὅστις ὁ τῆς  $BA$  πρὸς  $AE$ . τῷ δὲ τῆς  $\Theta Z$  πρὸς  $ZE$ , ὁ αὐτὸς ὅστις ὁ τῆς  $AG$  πρὸς  $GE$ , ἀφ' ὅτι ἰσογώνια εἶναι τὰ  $AE\Theta$ ,  $ZEG$ , τρίγωνα. ὁ ἄρα τῆς  $BZ$  πρὸς  $ZE$  λόγος σύγκειται, ἕκτε τῆς  $BA$  πρὸς  $AE$ , καὶ τῆς  $AG$  πρὸς  $GE$ .  
*Rursum autem dico, quod, hinc demonstratio, secundum eandem constitutionem universaliter procedat. Et primum quidem, quod ratio  $BZ$  ad  $ZE$ , in fig. num. XVII; componatur ex ratione  $BA$  ad  $AE$ , & ratione  $AG$  ad  $GE$ . Ducatur enim  $AE$  parallela ipsi  $GD$  ex puncto  $A$ : & producat  $BE$  in  $\Theta$ . Quoniam ergo ratio  $BZ$  ad  $ZE$ , quando  $Z\Theta$  media assumitur, componatur ex ratione  $BZ$  ad  $Z\Theta$ , & ratione  $\Theta Z$  ad  $ZE$ ; rationi autem  $BZ$  ad  $Z\Theta$ , equalis quidem sit ratio  $BA$  ad  $AE$ ; rationi autem  $\Theta Z$  ad  $ZE$  equalis sit ratio  $AG$  ad  $GE$ , eo quod triangula  $AE\Theta$  &  $ZEG$  sint æviangula: ratio ergo  $BZ$  ad  $ZE$  componitur, ex ratione  $BA$  ad  $AE$ , & ratione  $AG$  ad  $GE$ .*

Atq; hoc quidem modo, utriusq; generis rationes componuntur, tam ineffabiles, quam effabiles. Si enim componere velim rationes ineffabiles  $AC$  ad  $AB$ , &  $AB$  ad  $AE$ ; pono, in figura XVIII,  $AB$  æqualem  $AC$ , &  $EG$  æqualem  $AB$ , figuræ XVI. ductaque recta ex puncto  $A$ , nempe  $AB$ , ita quidem divisâ in  $\Delta$ , ut  $AD$  æquetur ipsi  $AE$  figuræ XVI,  $AB$  autem æqualis sit ipsi  $AB$  figuræ XVI: jungo  $BZ$  &  $\Delta G$  puncta, ductis re-

ctis. Ratio ergo facta multiplicando ex binis rationibus AC ad AB, & AB ad AE, est BZ ad ZE. Etenim ratio BZ ad ZE, componitur ex ratione BZ ad ZO, & ZO ad ZE. Si enim bina parallelogramma rectangula constuantur, unum quidem, ex BZ ZO, alterum vero ex ZO ZE: erunt quidem inter se ut bases: adeoque, ut parallelogrammum BO ad parallelogrammum OE: sic basis BZ ad basin ZE. At parallelogramma BO & OE sunt in composita ratione laterum: ergo & ratio BZ ad ZE habet rationem compositam ex ratione BZ ad ZO, & ZO ad ZE. Sed ut BZ ad ZO, sic BA ad AA: per II. VI Elementor. & ut ZO ad ZE, sic AG ad GE: juxta XV. VI. Elementorum. Erit ergo ratio BZ ad ZE, composita ex ratione BA ad AA, hoc est, BZ ad ZO, & ratione AG ad ZE, hoc est, ZO ad ZE. quod erat faciundum. Atq; hoc in plurimis rationum compositionibus eodem modo se habet: & si illud omne pro compositione rationum habendum esset, quod Theo & ipse Meibomius compositionem appellant, hæc methodus in omni compositione vera foret: ut vere propterea à Theone Alexandrino dictum esset, hanc methodum universaliter procedere. Sed rationes quidem defectus hac methodo dividuntur, ut antea indicavimus: alia vero methodo componuntur, quam postea proponemus. Hoc tamen Meibomio non prodest: cum is non magis hæc cognita habuerit, quam ipse Theo, neque plura in hac doctrina præstiterit.

De-



Demonstratum ergo, Theonem, compositionem rationum, non tantum effabilem, sed etiam ineffabilem, in lineis tradidisse : ideoque, per *πικρότης*, non *ποσότης* intellexisse aut numerum denominatorem, sed quamcunque quantitatem magnitudinum, tam numero effabilem, quam ineffabilem. Adeoque Meibomius, qui hac in re Theonem accusat, vel eundem non intellexit, vel mala fide egit, ipsique Lectori imponere voluit. Quod ipsum, de accusatione Eutocii dicendum est. Quamvis enim hic rationes numero effabiles, juxta numerorum methodum componat : non tamen hoc, ipsi magis vitio verti debet, quam Meibomio, qui plurimis id in locis hoc in libro facit. Si enim Meibomius dicat, se non tamen negare compositionem rationum ineffabilium : respondeo, neque id Eutocium facere : sed earum etiam meminisse. Qui enim, in lineis incomptæ magnitudinis, ponit rationem duplicatam triplicatam &c. is etiam rationes quascunque effabiles & ineffabiles, componi posse indicat. At vero id Eutocium facere, ex commentario ipsius, in VIII. Propof. lib. II. Archimedis de Sphæra & Cylindro liquet. Verba ipsius sunt. Καὶ ἐπεὶ πένταρες ὁρθαὶ ἐξ ἧς ἀνάλογον εἰσὶν αἱ BZ. Γ. Ε. Δ. ἡ BZ ἄρα πρὸς Δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ἡ BZ πρὸς Γ. τέτταρον ἡ Γ. πρὸς Ε. ἑξ ἧς δὲ καὶ ἡ Γ. πρὸς Δ διπλασίονα λόγον τῷ Γ. πρὸς Ε. ἢ ἄρα BZ πρὸς Δ ἡμιόλιον ἔχει λόγον τῷ Γ. πρὸς Δ. *Et quoniam quatuor rectæ in fig. XVIII. continuè sunt proportionales,*

les, nempe BZ.  $\Gamma$ . E.  $\Delta$ . habebit igitur BZ ad  $\Delta$  triplicatam rationem ejus, quam BZ habet ad  $\Gamma$ , hoc est quam  $\Gamma$  habet ad E. Habet vero  $\Gamma$  ad  $\Delta$  duplicatam rationem rationis  $\Gamma$  ad E. Ratio ergo BZ ad  $\Delta$  erit sesquuplicata rationis  $\Gamma$  ad  $\Delta$ . Rationem duplicatam fieri ex compositione duarum æqualium rationum inter se, & triplicatam ex tribus, ne ipse quidem Meibomius negaverit. Quamvis enim de vocibus dispuet: rem tamē concedit. Quoniam ergo, Eutocius non tantum rationis duplicatæ, triplicatæ in datis quibuscunque lineis naturam, sed; & solus forte, inter veteres explicat λόγον ἡμωλίσιν rationem sesquialteram, quam ad differentiam ejus quæ addendo fit sesquuplicatam appellavi: non potest jure accusari ignorantia in hac doctrina, aut quod compositionem rationum ineffabilium ignoraverit. Imo si nihil de his scriptum reliquisset, non tamen jure hæc ipsi dica scribi posset: quandoquidem, his ipsis verbis, quæ à Meibomio citantur, & quibus compositionis rationū in numeris meminit, Theonem laudet, quem dogma hoc tradidisse jam antea indicavimus.

Verum ergo id est, quòd antea diximus, Meibomium in Theone & Eutocio accusandis, vel malâ fide egisse, vel illos non legisse, vel denique non intellexisse.

## C A P. XII.

Quoniam vero, quæ de divisione rationum, hucusque tradidimus, atque certissimis argumentis confirmavimus; principio, cum quibusdam definitionibus



bus Euclidis, convenire non posse videantur : adeoque ipsemet Euclides falsi, hac in re, à nobis sit arguendus : paulo accuratius hoc capite de ea re agemus. Antea quidem diximus, non nobis esse propositum, Euclidem, sicubi erraverit, aut *παρόργμα* quoddam commiserit, defendere velle : cum sola nobis veritas curæ sit cordique ; prætereaque de nulla alia re, his in studiis, simus solliciti. Unde antea præfati sumus, si ex hoc capite, accusationem contra Ueteres institueret Meibomius ; neque vera pro falsis rejecisset : nullo nos modo ipsi adversarios futuros. Quoniam vero Meibomius, in hoc eodem cum aliis veteribus Geometris errore hæreat, falsas autem demonstrationes ex hoc falso principio exstruat : videndum, quid, de antiquioribus, præsertim de Euclide, sit dicendum ? Theonem enim Alexandrinum, vix excusare possum ; quin heic lapsus dicatur.

Primum igitur ajo, Euclidem, nusquam, quod ego sciam, divisionis rationum meminisse. Tum quoque, de compositione, ita alicubi loquutū ; ut potius videatur, compositionem & divisionem rationum invicem confundere ; quàm unam ab altera ullo modo distingvere. Quippe non hodie, neque nuper, id in Euclide animadvertum fuit ; sed ante multa secula : eum, non semper, tam accuratum in verbis, imò & in demonstrationibus esse ; quin aliquando labatur, humanique aliquid patiatur. de quo fusius libro primo à nobis dictum est. Sunt tamen, ex quibus, per bonam con-

M m

sequen-

sequentiam, ut in scholis loquuntur, id sequi videtur, Euclidem, divisionem rationum, à compositione distinxisse, saltem, juxta proprias assertiones distingvere debuisse: quamvis claris id verbis, nusquam, quod ego sciam, fecerit. Propositionibus enim decimona & vicesimalibri VI. Elementorum, ait, triangula & polygona similia inter se, in duplicata ratione esse laterum homologorum. *Propositio: XIX. Τα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἔσσι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Similia triangula ad invicem sunt in duplicata ratione laterum homologorum.* Propositione XX Τα ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὁλοῖς. καὶ τὸ πολύγωνον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περὶ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν. *Similia polygona dividuntur in similia triangula, numero æqualia, & totis similia: & polygonum duplicatam rationem habet ejus, quam homologum latus, ad latus homologum.* Sic libro XI. Propositione tricesima tertia, demonstrat similia solida parallelepipedà, esse in triplicata ratione homologorum laterum. Hinc igitur concludo: hoc, quod ita simpliciter affirmat Euclides, absolutè, & in omnibus, verum non est. Æqualia enim & similia, tam triangula, quàm polygona, non in duplicata sunt ratione suorum laterum, sed in eadem. Ita etiam æqualia & similia parallelepipedà solida, non sunt in triplicata ratione,



tione, suorum laterum : sed in eadem. Nam, ut, latus ad latus, sic, parallelepipedum ad parallelepipedum : sicut ipse quoque Euclides id demonstrat, propositione XXXII. ejusdem libri. Tum ergo hæ propositiones veræ erunt, quando una quantitas major est; altera minor: hoc est, quando unum triangulum vel polygonum, unumve parallelepipedum majus est, alterum minus. Tunc enim majus, ad minus, duplicatam, triplicatamve rationem habet rationis laterum homologorum. Primum ergo, propositiones hæ absolutæ & simpliciter veræ non sunt. Sed neque reciprocè sumendo veræ sunt. In figura enim XIX sit hexagonum majus ABCDEF : minus GHIKLM. utrumque, in sex triacula similia divisum : dico, ANB triangulum, ad triangulum GNH, habere rationem duplicatam laterum homologorum : ipsum quoque hexagonum ABCDEF, ad hexagonum GHIKLM, habere rationem duplicatam laterum homologorum. Nempe, majus triangulum, majusve polygonum, ad minus, duplicatam habet rationem laterum. Adeoq; minus ad majus, hoc est, triangulum GNH ad ANB, vel hexagonum GHIKLM ad ABCDEF, habet rationem subduplicatam laterum. Majus enim & minus sunt opposita. Unde & rationes eorum erunt oppositæ : & si hæc, duplicata; opposita erit subduplicata : & si hæc triplicata; opposita erit subtriplicata. Sic ratio cubi  $\theta\lambda\mu\nu\xi$  ad cubum  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$  est triplicata rationis  $\theta\lambda$  ad  $\alpha\eta$ . Ideoque ratio cubi  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$  ad

M m 2

cubum

cubum <sup>θικλμξ</sup> est subtriplicata rationis <sup>αη</sup> ad <sup>βλ</sup>. Quod, ut rectius percipiat, ac natura oppositorum eo melius perspiciatur : insigne fragmentum, nobilissimi scriptoris Archytæ Tarentini, integrum apponam, quamvis longiusculum sit, cum propter summam viri auctoritatem, atque in his rebus peritiam : tum quod vix quicquam plenius meliusve ea de re dictum sit. Ita vero is libro περὶ τῶν ἀντικειμένων differit. Καὶ χτ' νόμον, καὶ χτ' φύσιν ἀντικείσθαι ἀλλήλοις λέγει. Τὰ μὲν ὡς ἐναντία, οἷον ἀγαθὸν κακῶ, καὶ ὑγίης χἀμνονί, καὶ ἀληθές ψεύδει. Τὰ δὲ, ὡς ἕξιν τέρησει, οἷον ζωὰ θανάτῳ, καὶ ὄψις τυφλότῃ, καὶ ἐπιστήμα λάθῃ. Τα δὲ, ὡς πρὸς τι πῶς ἔχοντα· οἷον, διπλάσιον ἡμῖσι, ἄρχον ἀρχομένῳ, καὶ δεσποζον δεσποζομένῳ. Τὰ δὲ, ὡς κατὰ φασιν καὶ ἔποφασιν· οἷον τὸ ἀνθρώπου ἥμῃ, τὸ μὴ ἥμῃ, καὶ τὸ πτωχεῖν ἥμῃ, τῷ μὴ ἥμῃ. Διαφέροντι δὲ ταῦτα ἀλλήλων, ὅτι τὰ μὲν ἐναντία, ἔκ ἀναγκαῖα ἅμα γίνεσθαι, ὅθ' ἅμα, φθίρεσθαι, Ὑγεία γὰρ νόσῳ ἐναντίον, καὶ ἀρεμία κινήσει. Ἀλλ' ὅτε ὑγεία νόσῳ συνυπάρχει, ὅτε ἀρεμία κινήσει· ὅδ' ἂν ἅμα γίνεσθαι, ὅδ' ἂν ἅμα φθίρεσθαι ἐχέτερον αὐτῶν. Ἐξίς δὲ γενέσεως, καὶ τέρησις διαφέροντι τῷτῳ, ὅτι τὰ μὲν ἐναντία μεταβάλλειν πέφυκεν, οἷον τὸ ὑγίης ἐς τὸ χἀμνον, καὶ τὸ χἀμνον ἐς τὸ ὑγίης, καὶ τὸ ὀξύ ἐς τὸ βαρὺ, καὶ τὸ βαρὺ ἐς τὸ ὀξύ· ἕξίς δὲ καὶ τέρησις ἔκτε· ἀλλ' ἕξίς ἔρχεται μὲν ἐς τὰν τέρη-



τέρησιν, τέρεσις ἐκείη ἔρχεται ἐς τὰν ἕξιν. Τὸ μὲν γὰρ ζῶον  
 θινάσκει· τὸ δὲ γέ θινάσκον, εἰς ποῦα ζήσει. Ὅλως δὲ ἕξις  
 μὲν ἐνὶ συνοχᾷ τῷ χτ' φύσιν, τέρησις δὲ ἐκλείψις τῷ χτ' φύ-  
 σιν. Τὰ δὲ πρὸς τι, ἅμα ἀνάγκη, καὶ γίνεσθαι καὶ φθίρεσθαι.  
 Ἀδύνατον γὰρ διπλάσιον μὲν ἦναι, ἡμίσεον δὲ μὴ· καὶ ἡμίσεον  
 μὲν ἦναι, διπλάσιον δὲ μὴ. Καὶ αἶψα τι γίνεσθαι διπλάσιον, ἅμα  
 καὶ ἡμίσεον γίνεσθαι· καὶ αἶψα τι φθίρεσθαι διπλάσιον, ἅμα ἡμί-  
 σεον φθίρεσθαι. Κατάφασις δὲ καὶ ἀπόφασις καὶ λόγῳ εἶδεν  
 μάλλον ἐνὶ, καὶ ἀλήθεῖ καὶ ψεύδεσσι μάλλον ἐνὶ σημαίνεσθαι.  
 Τὸ γὰρ ἦναι ἀνθρώπον, ἀληθὲς ἐνὶ, ὅκα ὑπάρχει· ψευ-  
 δὲ δὲ ὅκα μὴ ὑπάρχει. Ὁ δὲ αὐτὸς λόγῳ, καὶ ὅπῃ ταῖς  
 ἀποφάσεσσι. Καὶ γὰρ αὐτὰ ἀληθὲς, ἢ ψευδὲς πρὸς τὸ πρᾶγ-  
 μα τὸ σημαίνον· ἀληθὲς μὲν, ὅκα ὑπάρχει, ψευδὲς  
 δὲ, ὅκα μὴ ὑπάρχει. Ἐπὶ αἰατῷ μὲν καὶ κακῷ μέσον τι,  
 τὸ μήτε ἀγαθόν, μήτε κακόν· καὶ πολλῷ καὶ ὀλίγῳ τὸ μέτρον·  
 καὶ βραδέει καὶ ταχέει τὸ ἴσοταχές. Ἐξίς, δὲ καὶ τεθήσει  
 εἰς ἐνὶ μέσον. Ζῶας τε γὰρ, καὶ θανάτῳ μετὰ ξὺ εἰς ἐν, καὶ  
 ὁράσει καὶ τυφλότητι· εἰ μή τις λέγει, τὸ μήπω γινόμενον  
 ζῶον, ἀλλὰ γινόμενον, μετὰ ξὺ ἦναι ζῶας καὶ θάνατον· καὶ τὸ μή-  
 πω βλεπόνον κυνιδίον, μετὰ ξὺ ἦναι, τῷ τε τυφλῶσθαι καὶ ὁρᾶν.  
 Οὕτω δὲ λέγων, καὶ συμβεβηκὸς ἀποδώσει τὰν μεσότητά, καὶ  
 καὶ τὸν ἀρκεῖον ὅσον τῷ ἐναντιωτάτων. Τὰ δὲ πρὸς τι ἐπιδέχεται

μεσότητά. Μεταξύ γὰρ τῶ δεσπόζοντος καὶ δούλου τὸ ἐλεύ-  
θερον καὶ μεταξύ τῶ μείζοντος καὶ μείοντος, τὸ ἴσον καὶ μεταξύ  
τῶ πλάτους καὶ στενῶς τὸ ἐφαρμόζον καὶ τῶ ἄλλων ἐναντίων ἐυρη-  
θήσεαί τι μέσον, ἢ καὶ ὠνομασμένον, ἢ καὶ ἀνώνυμον, Κατα-  
φάσι δὲ μεταξύ ὁδὸν ἀνέειν, οἶον, τῶ τε ἡμῶν ἀνθρώπων, καὶ  
τῶ μὴ ἡμῶν καὶ τῶ ἡμῶν μουσικόν, τὸ μὴ μουσικόν. Καὶ ὅλως  
δὲ ἀνάγκη, καταφῆσαι, ἢ σποφῆσαι, λέγοντα ὡς τινος.  
καταφῆσαι μὲν, ὅκα τίῃναι δηλοῖ, οἶον, ἀνθρώπων, ἵππων καὶ  
συνυπάρχοντι τῷ τῷ, οἶον, ἀνθρώπων μὲν, τῶ μουσικῷ ἡμῶν, ἵππων  
δὲ, τὸ πολεμιστῶν. σποφῆσαι δὲ ὅκα, μὴ ἡμῶν τί δαλοῖτο, οἶον, μὴ  
ἡμῶν ἀνθρώπων, ἢ μὴ ἡμῶν ἵππων, ἢ μὴ συνυπάρχον τῷ τῷ, οἶον,  
μὴ ἡμῶν τὸν ἀνθρώπων μουσικόν, ἢ μὴ ἡμῶν τὸν ἵππων πολεμιστῶν.  
Μεταξύ δὲ γὰρ τῶς καταφάσι αὐτῶς καὶ σποφάσι ὁδὸν.  
*Et secundum legem, et secundum naturam, quaedam  
sibi invicem opponi dicuntur: alia quidem ut contraria:  
sicut bonum, malo; et sanum, aegro; et verum menda-  
cio: alia vero, ut habitus, privationi; sicut vita, mor-  
ti, et visus, caecitati, et scientia, ignorantia: alia ve-  
ro, ut relationem invicem habentia; sicut, duplum di-  
midio, imperans, illi cui imperatur, et dominus, servo:  
alia vero, ut affirmatio et negatio, sicut hominem esse,  
opponitur, non esse, et diligentem esse, opponitur, non  
esse. Differunt vero haec invicem, quod, contraria non  
necessario simul sint, et simul esse desinant. Sanitas e-  
nim morbo contraria est, et quies, motui. Sed neque  
sani-*



sanitas unà cum morbo existit; neque quies, una cum motu: neque alterutrum horum, cum altero simul incipit, neque simul cum altero esse desinit. Habitus vero existentiae (in Græco legitur ἐξ ἧς δὲ γένεσις) & ubi vox γένεσις denotare videtur fieri aut existere, ut distingvatur vox habitus ab aliis significationibus) & privatio, hoc differunt: quod, contraria permutari invicem possint: sicut, sanitas in aegritudinem; & aegritudo, in sanitatem: & acutum, in grave; & grave in acutum. habitus vero & privatio non item: sed habitus quidem in privationem mutatur, privatio verò nunquam in habitum. Etenim, vivens quidem moritur: mortuum verò minimè reviviscit. Absolutè autem, habitus est possessio ejus, quod est secundum naturam: privatio verò, amissio ejus, quod est secundum naturam. Quæ autem relationem invicem habent, simul necessario & sunt, & esse desinunt. Impossibile enim est, duplum quidem dari, nisi dimidium una detur. Et statim ac duplum esse incipit, simul & dimidium est: & statim ac duplum esse desinit, etiam dimidium esse desinit. Affirmatio vero & negatio sermonis potius species sunt, ac veritatis & mendacii indices. (In Græco legendum arbitror Κατὰ Φασιν δὲ καὶ ἀπὸ Φασιν λόγῳ εἶδεναι μᾶλλον ἐν τῷ &c. & sic quoque verti: altera enim lectio sensum commodum non habet) Esse enim hominem, verum est, quando ita est: falsum autem, quando non est. Eadem vero ratio in negatione. Quippe hæc, vel vera est, vel falsa, secundum rem

rem illam quam denotat: vera quidem, quando, res ita se habet: falsa autem, quando non ita se habet. Rursum, bono & malo medium aliquod datur, quod neque bonum est, neque malum: plus quoque, & minus, medium habet mediocritatem: & tardius ac celerius, id quod est æqualis celeritatis. Habitus vero & privationis nullum datur medium. Inter vitam enim & mortem, nihil est medium; sicut neque, inter cæcitatem & visum: nisi quis dicat, id, quod nondum natum est, sed nunc nascitur, medium esse inter vitam & mortem: & catellum, qui nondum videt, inter cæcitatem & visum medium obtinere. Qui vero ita loquitur, medium dat, secundum accidens: non vero secundum propriam definitionem contrariorum. Relativa vero medium habent. Inter dominum enim & servum medium datur liberum esse: & inter majus & minus, æquale: & inter latius & angustius, id quod convenit. Cæterorum quoque contrariorum, medium aliquod invenitur, quod, vel nomen habet, vel nomine caret. Inter affirmationem vero & negationem, medium non datur. Sicut inter illas enunciationes, homo est, & homo non est, nihil medium datur: aut illud, musicum esse, vel non esse. Et absolutè quidem, aliquid necessario vel affirmari dicitur, vel negari de aliquo: affirmari quidem, quando esse indicatur, sicut hominem, equum: & quæ una cum his existunt: sicut, cum homine quidem, esse musicum; cum equo verò, esse bellatorem: negari verò, quando indicatur quid non sit: sicut non esse hominem, vel non esse equum: tum quoque de iis quæ cum his sint, ut hominem  
non



*non esse musicum, aut equum non esse bellatorem. Inter affirmationem vero & negationem nullum est mediū. Cum vero ex his constet, duplum & subduplum, & duplicatum ac subduplicatum, ex eo genere oppositorum esse, quorum uno dato, alterum quoque detur, & uno sublato, alterum quoque tollatur: manifestum est, cum triangula, polygonave majora, habeant ad minora, rationem duplicatam laterum homologorum: etiam minora triangula & polygona, ad majora, rationem habere subduplicatam laterum homologorum. Atque eodem modo, cum, parallelepipedum majus, ad simile parallelepipedum minus, rationem habeat triplicatam rationis laterum homologorum: etiam minus parallelepipedum, ad majus, rationem habere subtriplicatam laterum homologorum. Omnis enim ratio duplicata ponit subduplicatam: & omnis ratio triplicata ponit subtriplicatam. Nempe, si unus terminus comparatorum, duplicatus fuerit; alter subduplicatus erit: & si unus triplicatus; alter subtriplicatus. At, quemadmodum, duplicatum & triplicatum ex multiplicatione fit: ita subduplicatum, & subtriplicatum fit ex divisione. Contrariae enim conclusiones ex contrariis operationibus procedunt, duplicatio quidem ex multiplicatione, ut jam dictum fuit: subduplicatio vero, & subtriplicatio ex divisione. Sicut ergo nulla duplicatio, triplicatiove, sine multiplicatione peragitur: ita, nulla subduplicatio, subtriplicatiove sine divisione unquam perfici potest.*

N n

Eodem

Eodem ergo modo, quo ratio ANB, ad GNB, vel ABCDEF, ad GHIKLM, est facta multiplicando, ex compositione rationis AG, ad GN, & AB, ad GH: ratioque  $\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi$  ad  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$  est facta triplicando rationem  $\theta\lambda$  ad  $\alpha\eta$  per seipsam: ita etiam, ratio GNH ad ANB, vel GHIKLM ad ABCDEF, fit dividendo rationem GN ad AN per seipsam: ratioque  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$  ad  $\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi$  fit dividendo bis rationem  $\alpha\eta$ , ad  $\theta\lambda$  per seipsam. Sit enim in eadem figura XIX ut, AN ad GN, sic GN ad HP. Et rursum, ut,  $\theta\lambda$  ad  $\alpha\eta$ , sic  $\alpha\eta$  ad  $\epsilon\sigma$ , &  $\epsilon\sigma$  ad  $\sigma\tau$ . Ut ergo AN ad HP, sic ANB triangulum ad GNH triangulum: vel, ut AN ad HP, sic ABCDEF ad GHIKLM: & vice versa, ut GNH ad ANB, sic HP ad AN: vel ut GHIKLM ad ABCDEF, sic HP ad AN. Ratio autem GNH ad ANB, vel GHIKLM ad ABCDEF est subduplicata rationis GN ad AN, ut jam demonstravimus. ergo & ratio HP ad AN, est subduplicata rationis GN ad AN. At ratio subduplicata est facta ex divisione rationis illius in se, cujus est subduplicata: ut jam indicavimus, atque antea plenius exposuimus. Ratio ergo HP ad AN est facta ex divisione rationis GN ad AN, per rationem GN ad AN. Eodem modo, ratio  $\theta\lambda$  ad  $\sigma\tau$ , est triplicata rationis  $\theta\lambda$  ad  $\alpha\eta$ . Nam ut  $\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi$  ad  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$ , sic  $\theta\lambda$  ad  $\sigma\tau$ . At  $\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi$  ad  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$ , est triplicata rationis  $\theta\lambda$  ad  $\alpha\eta$ . ergo  $\theta\lambda$  ad  $\sigma\tau$ , erit triplicata rationis  $\theta\lambda$  ad  $\alpha\eta$ . Dico vero vice versa, ut,  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$  ad  $\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi$ , sic  $\sigma\tau$  ad  $\theta\lambda$ . Sed ratio  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$  ad  $\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi$ , est subtriplicata rationis  $\alpha\eta$  ad  $\theta\lambda$ ,  
utpo.



utpote, opposita rationi  $\theta\lambda\mu\nu\epsilon$  ad  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$ : ergo & ratio  $\sigma\tau$  ad  $\theta\lambda$ , erit subtriplicata rationis  $\alpha\eta$  ad  $\theta\lambda$ . Ratio vero subtriplicata, est facta ex iterata divisione rationis datae per seipsam divisae: ratio ergo  $\sigma\tau$  ad  $\theta\lambda$ , est facta ex iterata divisione rationis  $\alpha\eta$  ad  $\theta\lambda$ .

Atq; ex his liquet, quod, quamvis Euclides, nusquam, quod ego sciam, divisionis rationum meminerit: per bonam tamen consequentiam, illa doctrina, ex ipsius principiis & demonstrationibus, deducatur ac probeatur. Unde etiam patet, quomodo definitiones X & XI libri quinti, rationis nempe duplicatae, triplicatae, &c. sint explicandae: nimirum semper de ratione majoris termini ad minorem, non autem vice versa.

Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ περὶ πρὸς τὸ δεύτερον. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἢ περὶ πρὸς τὸ δεύτερον καὶ αἰεὶ ἐξ ἧς ἐνὶ πλείον, ἕως αὖ ἡ ἀναλογία ὑπάρχει. Quando autem tres magnitudines proportionales fuerint, prima, ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur, ejus quam habet ad secundam. Quando autem quatuor magnitudines fuerint proportionales: prima, ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur, ejus quam habet ad secundam: & semper deinceps unâ plus, quoad proportio processerit. Nempe si in figura XIX, tres lineæ AN. GN. HP fuerint continuè proportionales: erit ratio

N n 2

AN

AN ad HP, duplicata rationis AN ad GN. ratio autem HP ad AN, subduplicata rationis GN ad AN, ut jam fuit demonstratum; adeoque, & subduplicata rationis HP ad GN: cum HP ad GN æquetur rationi GN ad AN. Eodem modo ratio  $\theta\lambda$  ad  $\sigma\tau$ , est triplicata rationis  $\theta\lambda$  ad  $\alpha\eta$ : sumptis quatuor continuè proportionalibus  $\theta\lambda$ .  $\alpha\eta$ .  $\rho\sigma$ :  $\sigma\tau$ . Ratio autem  $\sigma\tau$  ad  $\theta\lambda$  est subtriplicata rationis  $\alpha\eta$  ad  $\theta\lambda$ , vel  $\sigma\tau$  ad  $\rho\sigma$ .

Illud etiam ex his clarum fit, rationem AN ad HP fieri componendo, ex ratione AN ad GN per rationem GN ad HP: adeoque, rationem GN ad HP fieri, dividendo rationem AN ad HP, per se: hoc est, inveniendò mediam proportionalem inter AN & HP. Sicut enim, AN ad HP, est duplicata rationis, GN ad HP: ita, GN ad HP, est subduplicata rationis AN ad HP.

Ita etiam ratio  $\alpha\eta$  ad  $\rho\sigma$ , est subduplicata rationis  $\theta\lambda$  ad  $\alpha\eta$ , vel  $\alpha\eta$  ad  $\rho\sigma$ : tum quoque ratio  $\rho\sigma$  ad  $\sigma\tau$ , subtriplicata rationis  $\theta\lambda$  ad  $\sigma\tau$ , inventa nempe per duas medias proportionales inter  $\theta\lambda$  &  $\sigma\tau$ . Quod si quinta continuè proportionalis major in eodem schemate sumatur: erit ratio  $\rho\sigma$  ad  $\sigma\tau$ , subquadruplicata rationis  $\phi\chi$  ad  $\sigma\tau$ , inventa nempe, per tres medias proportionales, inter  $\phi\chi$  &  $\sigma\tau$  constitutas. Atque hoc modo additis quotcunque continuè proportionalibus; aut pluribus mediis proportionalibus inventis: ratio excessus vel componitur, vel dividitur.

Inver.



Inversa autem methodo, rationes defectus, additis quocunque continuè proportionalibus, dividuntur: inventis autem mediis proportionalibus, augmentur ac multiplicantur. Ex iis enim, quæ antea fuere demonstrata, ratio HP ad AN est subduplicata rationis GN ad AN, adeoque ratio GN ad AN, vel HP ad GN, est duplicata rationis HP ad AN. Sic  $\xi\sigma$  ad  $\theta\lambda$ , est subduplicata rationis  $\xi\sigma$  ad  $\alpha\eta$ , ut antea demonstratum. Unde ratio  $\xi\sigma$  ad  $\alpha\eta$ , est duplicata rationis  $\xi\sigma$  ad  $\theta\lambda$ . & eodem modo  $\sigma\tau$  ad  $\xi\sigma$ , est triplicata rationis  $\sigma\tau$  ad  $\theta\lambda$ .

Ex quo id etiã intelligitur, quid ratio illa rationis sit, quam Archimedes ἡμίσιον vocat, Latine sesquialteram: quæ potius, ad differentiam illius quæ addendo fit, sesquuplicata foret dicenda, & sic sesquitriplicata & sesquiquadruplicata: novis quidem vocibus, sed ad differentiam rerum necessariis: quas tamen ita propono, ut, si quis alias retinendas velit, cum eo disputare nolim. Nempe, ratio  $\phi\chi$  ad  $\xi\sigma$ , est triplicata rationis  $\phi\chi$  ad  $\theta\lambda$ : ratio autem  $\phi\chi$  ad  $\alpha\eta$ , est duplicata rationis  $\phi\chi$  ad  $\theta\lambda$ : ratio ergo  $\phi\chi$  ad  $\xi\sigma$ , sesquuplicata Græcè ἡμίσιον, sesquialtera rationis  $\phi\chi$  ad  $\alpha\eta$ . Una enim ratio est ut 3, altera ut 2. Sic ratio  $\phi\chi$  ad  $\sigma\tau$ , est quadruplicata rationis  $\phi\chi$  ad  $\theta\lambda$ : adeoque, erit duplicata rationis  $\phi\chi$  ad  $\alpha\eta$ : sesquitriplicata autem, vel si mavis, sesquitertia, rationis  $\phi\chi$  ad  $\xi\sigma$ . Ita, si in eadem hac figura, sumantur octo continuè proportionales  $\pi\nu$ ,  $\omicron\mu$ ,  $\zeta\nu$ ,  $\phi\epsilon$ ,  $\theta\delta$ ,  $\alpha\gamma$ ,  $\xi\theta$ ,  $\sigma\tau$ . erit quidem ratio  $\pi\nu$  ad  $\sigma\tau$  septuplicata ratio-

Nn 3

nis

onis  $\pi\nu$  ad  $\sigma\mu$ ; ratio autem  $\pi\nu$  ad  $\epsilon\epsilon$  erit sextuplicata rationis  $\pi\nu$  ad  $\sigma\mu$ . unde ratio  $\pi\nu$  ad  $\sigma\tau$  erit sesquifexta; vel si mavis sesquifexplicata rationis  $\pi\nu$  ad  $\epsilon\epsilon$ . sunt enim, ut 7 ad 6. Porro ratio  $\pi\nu$  ad  $\alpha\gamma$  est qvintuplicata rationis  $\pi\nu$  ad  $\sigma\mu$ , adeoque subsefquiqvintupla, vel subsefquiqvintuplicata rationis  $\pi\nu$  ad  $\epsilon\beta$ . Ratio enim  $\pi\nu$  ad  $\epsilon\beta$  est sextuplicata rationis  $\pi\nu$  ad  $\sigma\mu$ . ratio autem  $\pi\nu$  ad  $\alpha\gamma$  est qvintuplicata ejusdem rationis  $\pi\nu$  ad  $\sigma\mu$ . Ergo ratio  $\pi\nu$  ad  $\epsilon\beta$  est sesquiqvintuplicata rationis  $\pi\nu$  ad  $\alpha\gamma$ . & per consequens, ratio  $\pi\nu$  ad  $\alpha\gamma$ , est subsefquiqvintuplicata rationis  $\pi\nu$  ad  $\epsilon\beta$ . Adeoque ratio  $\pi\nu$  ad  $\epsilon\beta$ , componitur ex ratione  $\pi\nu$  ad  $\sigma\mu$ , multiplicata per rationem  $\pi\nu$  ad  $\alpha\gamma$ : vel, ex ratione  $\pi\nu$  ad  $\alpha\gamma$ , multiplicata per rationem  $\pi\nu$  ad  $\sigma\mu$ . Eadem vero ratio,  $\pi\nu$ , ad  $\epsilon\beta$ , divisa per rationem  $\pi\nu$  ad  $\sigma\mu$ , dat factam,  $\pi\nu$  ad  $\alpha\gamma$ : & divisa per  $\pi\nu$  ad  $\alpha\gamma$ , dat factam  $\pi\nu$  ad  $\sigma\mu$ .

Quoniam vero antea demonstratum fuit, rationem  $\phi\epsilon$  ad  $\pi\nu$ , esse subtriplicatam rationis  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ ; & rationem  $\zeta\nu$  ad  $\pi\nu$ , esse subduplicatam rationis  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ : erit ergo ratio  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$  triplicata quidem rationis  $\phi\epsilon$  ad  $\pi\nu$ ; duplicata vero rationis  $\zeta\nu$  ad  $\pi\nu$ . Et eodem modo, eadem ratio  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ , erit quadruplicata rationis  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$ , & qvintuplicata rationis  $\alpha\gamma$  ad  $\pi\nu$ : & sic quousque continue proportionales fuerint ordinatæ. Quod ex jam demonstratis liquet. Erit ergo ratio  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ , composita ex ratione  $\zeta\nu$  ad  $\pi\nu$ , &  $\zeta\nu$  ad  $\pi\nu$ , seu  $\theta\delta$  ad  $\zeta\nu$ . est enim  $\theta\delta$  ad  $\zeta\nu$ , æqualis rationi  $\zeta\nu$  ad  $\pi\nu$ . Eodem modo, ratio  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ , est composita, ex ratione  $\phi\epsilon$  ad  $\pi\nu$  triplicata,



cata, & ex ratione  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$  quadruplicata, & sic in infinitum. Omne autem compositum in ea dividitur unde componitur. Ratio ergo  $\epsilon\mu$  ad  $\pi\nu$ , in tres æquales rationes divisa dat factam, rationem  $\phi\epsilon$  ad  $\pi\nu$ : & in quatuor, rationem  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$ . & sic in cæteris. Adeoque in rationibus defectus, quo plures continuè proportionales sumantur, eo magis prima ratio dividitur; quo plures autem mediæ continuè proportionales habentur: eò magis rationes defectus componuntur. Si enim inter terminos rationis  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$  unica media proportionalis sumatur, nempe  $\zeta\nu$ ; erit ratio  $\zeta\nu$  ad  $\pi\nu$ , vel  $\theta\delta$  ad  $\zeta\nu$  duplicata rationis  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$ . Quadratum enim ex  $\zeta\nu$ , ad quadratum ex  $\pi\nu$ , se habet, ut  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$ . At vero quadratum ex  $\zeta\nu$ , seu minus, ad quadratum ex  $\pi\nu$ , seu majus, est in subduplicata ratione laterum. Majus enim quadratum, ad minus, est in ratione duplicata laterum; adeoque minus, quadratum ad majus, erit in ratione subduplicata laterum: hoc est, ratio quadrati ex  $\zeta\nu$ , ad quadratum ex  $\pi\nu$ , quæ est ratio  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$ , est subduplicata rationis laterum, hoc est, rationis  $\zeta\nu$  ad  $\pi\nu$ . Ratio ergo  $\zeta\nu$  ad  $\pi\nu$ , est composita ex ratione  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$  duplicata. Quod si inter  $\phi\epsilon$  &  $\pi\nu$ , vel alterius cujuscunque rationis defectus terminos, sumatur media proportionalis: ratio prioris termini ad mediam; vel mediæ, ad consequens, erit composita ex ipsa ratione defectus datâ duplicatâ. Cujus demonstratio ex priori dependet. Sive enim inter  $\theta\delta$  &  $\pi\nu$ , sive inter  $\phi\epsilon$  &  $\pi\nu$ , sumatur media proportionalis;

lis; eadem erit demonstratio, eadem utrobique veritas.

Si vero inter  $\phi\epsilon$  &  $\pi\nu$ , fumantur duæ mediæ proportionales, nempe  $\zeta\nu$  &  $\sigma\mu$ . erit ratio  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ , vel  $\zeta\nu$  ad  $\sigma\mu$ , vel  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ , (hæ enim tres rationes sunt invicem æquales) triplicata rationis  $\phi\epsilon$  ad  $\pi\nu$ . Solidus enim cubus ex  $\sigma\mu$ , ad solidum cubum ex  $\pi\nu$ , se habet, ut,  $\phi\epsilon$  ad  $\pi\nu$ . Est vero cubus ex  $\sigma\mu$ , ad cubum ex  $\pi\nu$ , in subtriplicata ratione laterum. Major enim cubus, qui est ex  $\pi\nu$  ad minorem ex  $\sigma\mu$ , est in triplicata ratione laterum: seu, ut,  $\pi\nu$  ad  $\phi\epsilon$ , sic cubus ex  $\pi\nu$ , ad cubum ex  $\sigma\mu$ . Adeoque minor cubus ad majorem erit in subtriplicata ratione laterum  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ . Est vero ratio minoris cubi ad majorem, ut,  $\phi\epsilon$  ad  $\pi\nu$ . Ergo ratio  $\phi\epsilon$  ad  $\pi\nu$ , erit subtriplicata rationis  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ . ideoque ratio  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ , triplicata rationis  $\phi\epsilon$  ad  $\pi\nu$ .

Porro ex priori demonstratione, si inter  $\zeta\nu$  &  $\pi\nu$  sumatur media proportionalis  $\sigma\mu$ : erit ratio  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ , duplicata rationis  $\zeta\nu$  ad  $\pi\nu$ . Ratio autem  $\zeta\nu$  ad  $\pi\nu$ , antea fuit demonstrata duplicata esse rationis  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$ . Ergo ratio  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ , est quadruplicata rationis  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$ . Et sic in infinitum progrediendo, quo plures medii proportionales inter terminos rationis defectus fumantur: eo magis ratio illa componitur: & si una sumatur media proportionalis, duplicatur; si duæ, triplicatur; si tres, quadruplicatur, & sic in infinitum. At ratio quadruplicata, magis est composita quam triplicata:



cata: & triplicata, magis composita, quàm duplicata, & sic in cœteris.

Quo plures autem, in rationibus defectûs, continuè proportionales fuerint, eo magis ratio defectûs dividitur. In ratione enim  $\theta\delta$  ad  $\phi\epsilon$ , si sumatur una continuè proportionalis, nempe  $\zeta\nu$ , vel ab altera parte,  $\alpha\gamma$ : erit ratio  $\theta\delta$  ad  $\zeta\nu$ , vel  $\alpha\gamma$  ad  $\phi\epsilon$ , subduplicata rationis  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ , vel  $\theta\delta$  ad  $\phi\epsilon$ . Cum enim ratio  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ , vel  $\theta\delta$  ad  $\phi\epsilon$ , sit duplicata rationis  $\theta\delta$  ad  $\zeta\nu$ : ut jam fuit demonstratum: erit etiam huic opposita, ratio  $\theta\delta$  ad  $\zeta\nu$ , subduplicata rationis  $\theta\delta$  ad  $\phi\epsilon$ : adeoque, facta ex æquali divisione rationis  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ .

Sumptis verò binis continuè proportionalibus, nempe  $\zeta\nu$ , &  $\sigma\mu$ ; vel, ab altera parte,  $\rho\beta$ , &  $\alpha\gamma$ : erit ratio  $\theta\delta$ , ad  $\sigma\mu$ , vel  $\rho\beta$ , ad  $\phi\epsilon$ , subtriplicata rationis  $\theta\delta$  ad  $\phi\epsilon$ : hoc est,  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ , vel  $\zeta\nu$  ad  $\sigma\mu$ , &c. Ratio enim  $\zeta\nu$  ad  $\sigma\mu$ , est triplicata rationis  $\theta\delta$  ad  $\sigma\mu$ , ut jam antea fuit demonstratum. Ergo  $\theta\delta$  ad  $\sigma\mu$ , est subtriplicata rationis  $\zeta\nu$  ad  $\sigma\mu$ . Adeoque subtriplicata rationis  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ , vel  $\theta\delta$  ad  $\phi\epsilon$ . Hæ enim rationes sunt inter se æquales. Quod si adhuc una continuè proportionalis addatur, nempe  $\pi\nu$ : erit ratio  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$ , subquadruplicata rationis  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ . Ratio enim  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ , est quadruplicata rationis  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$ : ut jam antea demonstravimus. Opposita ergo huic  $\theta\delta$  ad  $\pi\nu$ , erit subquadruplicata rationis  $\sigma\mu$  ad  $\pi\nu$ .

In omni ergo rationum compositione, id verum esse deprehenditur: rationes excessûs, componi, ad-

Q o

jectis

jectis continuè proportionalibus; dividi autem, mediis proportionalibus una pluribusve interpositis: defectus verò, rationes, contrario se modo habere; & componi quidem, interpositis, unâ, pluribusve mediis proportionalibus; dividi autem, adjectâ unâ alterâve continuè proportionali. Tum quoque compositionem in rationibus excessûs, & divisionem in rationibus defectûs, non tantùm fieri, quando nuper inventa, binis, continuè proportionalis fuerit; sed etiam, quando utrâque datâ vel major est, vel minor. Cum enim omnes lineæ in infinitum augeri minuique possunt; partesque quæcunque, juxta quamcunque rationem, addi, demique; etiam linea quæcunque, major utrâque datâ, vel minor utrâque datâ, erit una ex continuè proportionalibus. Si enim ratio majoris inventi ad minorem terminum datum, vel minoris inventi ad majorem terminum datum, duplicata non fuerit rationis datæ, sed major: erit triplicata, vel quadruplicata, vel decuplicata, vel centuplicata, atque sic in infinitum. Et si minor fuerit duplicatâ: erit vel sesquuplicata, vel sesquitriplicata, vel sesquiquadruplicata, vel quæcunque alia; sic quoque in infinitum progrediendo. In rationibus autem defectûs, eodem modo, ratio inventa, erit subduplicata, subtriplicata, subcentuplicata: vel subsesquuplicata, subsesquitriplicata, subsesquiquintuplicata, & sic porro in infinitum. Quod si ne sic quidem rationem illam rationis explicare datum fuerit: ad multiplo-superpar



particulares veniendum erit. Sic inter  $\pi\nu$  &  $\sigma\tau$  si media assumatur  $\rho\beta$  erit ratio  $\pi\nu$  ad  $\sigma\tau$  septuplicata rationis  $\rho\beta$  ad  $\sigma\tau$ . Sumptis enim inter  $\pi\nu$  &  $\sigma\tau$  sex mediis proportionalibus: erit ratio  $\pi\nu$  ad  $\sigma\mu$ , æqualis rationi  $\rho\beta$  ad  $\sigma\tau$ . Sumpta vero inter  $\pi\nu$  &  $\sigma\tau$ ,  $\alpha\gamma$ : erit  $\pi\nu$  ad  $\sigma\tau$ . triplo-  
 sesquialtera, vel triplo sesquuplicata rationis  $\alpha\gamma$  ad  $\sigma\tau$ . Sic ratio  $\pi\nu$  ad  $\sigma\tau$  est duplo sesquitriplicata rationis  $\theta\delta$  ad  $\sigma\tau$ . Ratio autem  $\pi\nu$  ad  $\sigma\tau$  est supertripartiens rationis  $\phi\epsilon$  ad  $\sigma\tau$ . His autem contrariæ sunt rationes defectus, suo quæque loco sumptæ. Atque in his quidem proprias voces invenire non tam facile est. Neque sanè nos de vocibus admodum solliciti sumus: modò, ita sensa animi aliis explicata dare possimus, ut intelligamur. Id liquet, quamcunque mediam, inter alias duas medias datas, assumptam, rationem quidem excessus dividere, defectus vero rationem componere: quod fusè hucusque à nobis fuit demonstratum.

## CAP. XIII.

Quoniam vero ex hac mediarum assumptione quædam analogiæ seu proportionales enascantur, quæ Geometricæ nec appellantur, nec sunt; ne hoc nobis officiat, ulliusve erroris causâ sit, paulo accuratius, proportionales hæc explicabimus. Notandum vero est, id quod Græci ἀναλογίαν vocant Latinis proportionem dici; quam quidem vocem primus Cicero ita appellavit. Verba enim Platonis ex Timæo,

Οο 2

δεσµών

δεσμῶν δ' ὁ χάλλιστος, ὅς αὖ αὐτὸν καὶ τὰ ξυυδόμενα, ὅτι μάλιστα ἐν ποιῇ, τὸ το δὲ πέφυκεν ἀναλογία χάλλιστα συνετελεῖν· ὅπου ταν γὰρ ἀριθμῶν τριῶν, εἴτε ὀγκῶν, εἴτε δυνάμεων, ἀνθινῶν ἢ, τὸ μέσον ὅ, πὶ πρὸς τὸ πρῶτον πρὸς αὐτὸ, τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔχαστον· καὶ πάλιν αὐτῆς, ὅ, πὶ, τὸ ἔχαστον πρὸς τὸ μέσον, τὸ το μέσον πρὸς τὸ πρῶτον· hisce Latinis exposuit. *Sed vinculorum id esse aptissimum atque pulcherrimum, quod ex se, atque de his, quæ astringit, quam maximè unum efficit. Id optimè assequitur, quæ Græce ἀναλογία, Latine (audendum est enim, quoniam hæc primum à nobis novantur) comparatio, proportiōve dici potest. Quando enim trium vel numerorum, vel figurarum, vel quorumcunque generum, contingit, ut, quod medium sit uti primum proportionem, ita id postremo comparetur; vicissimque, ut extremum cum medio, sic medium cum primo conferatur &c.* Unde liquet primum Cicero- nem Græcam hanc vocem per proportionem explicuisse. Commandinus autem, alique, id quod Græci λόγον vocant, proportionem dixere, retenta Græca voce ἀναλογίας, vel pro illa, alia quadam assumpta, quamvis minus Latina, nempe proportionalitate. Mihi tamen rectius fecisse videntur, qui λόγον explicu- ère, per *rationem*: ἀναλογίαν, per *proportionem*: quod & plurimis aliis, atq; inter eos, Finchio nostro, in Ge- ometria Rotundi, placuisse video. Vox vero ἀναλογία apud Platonem, Aristotelem, aliosque optimi ævi scrip-



scriptores Græcos, denotat *ισότητι τῶν λόγων equalitatem rationum*, vel ut Euclides loqui amat, *ὁμοιότητι τῶν λόγων similitudinem rationum*. Quas vero Euclides similes esse ait, illas etiam æquales fatetur. Quæ enim *ἀναλογίαν* non habent, hoc est, quæ juxta Euclidem, similes non sunt, illas majores minoresve vocat: unde similes, neque majores erunt, neque minores; ideoque æquales. Theoni autem Smyrnæo *ἀναλογία* non illam tantum proportionem denotat, quæ vulgo Geometrica appellatur, estque duarum rationum æqualitas: verum etiam illam, quam vulgo Arithmeticam & Musicam dicunt. Magnum enim naturæ miraculum est, res quascunque solidas, si juxta certas rationes divisæ, pulsantur, sonos edere gratos ingratosve. Cujus quidem rei, certam demonstrationem ac regulam, primus Pythagoras invenisse traditur. Musica enim ante ipsum per plurima secula inventa & usurpata fuerat: quod, tam ex sacris libris, quàm ex omni historia constat. Hoc vero Pythagoræum inventum, ejusque occasionem, totamque rei rationem, verbis potius Nicomachi Geraseni, quàm meis, recensebo: ut infælicitas Critica seu Grammatica Meibomii, Lectori ab oculis ponatur: & quam malè sibi consulat, qui ista aliis objicit, quorum ipsemet reus est. Narrat ergo Nicomachus Gerasenus in Enchiridio Harmonices libr. I. pag. ex editione Meibomii 11. & 12. Pythagoram, fabri officinam ingressum, animadvertisse, inæqualis ponderis malleos inæquales & dissimiles

sonos edidisse, fixoque accuratè palo, chordas, cum his ponderibus, huic applicuissè, totamque rem inde perdidicisse. ἀπαρτίσας πεισάρας χορδὰς ὁμύλους, καὶ ἰσοκάλους, ἰσοπαγεῖς τε καὶ ἰσοσρόφες, ἔχαστην ἀφ' ἑκάστης ἐξήρτησεν, ὁλκὴν προσδύσας ἐν τῷ χατῷθεν μέρῳ. Τὰ δὲ μήκη τῶν χορδῶν μηχανησάμενος ἐκ παντὸς ἰσαίετα, εἴτα κρέων ἀνὰ δύο ἅμα χορδὰς, ἐνάλλαξ, συμφωνίας εὐεσκε πᾶς προλεχθείσας, ἄλλην ἐν ἄλλῃ συζυγία. Τὴν μὲν γὰρ ὑπὸ τῷ μεγίστῳ ἐξαρτήματι τεινομένην, πρὸς τὴν ὑπὸ τῷ μικροτάτῳ, ἀφ' πασῶν, φθηγνομένην κατελάμβανεν. Ἦν δὲ ἡ μὲν δώδεκάπινων ὁλκῶν ἡ δὲ ἑξ. Ἐν διπλασίᾳ δὲ λόγῳ ἀπέφαινε τὴν ἀφ' πασῶν ὅπερ καὶ αὐτὰ βάρη ὑπέφαινε. Τὴν δὲ αὖ μεγίστην πρὸς πᾶσι μικροτάτην, ὅσων ὁκτὼ ὁλκῶν ἀφ' ἑκάστης συμφωνῶσαν· ἐνθεν ταυτὴν ἀπέφαινε ἐν ἡμιολίᾳ λόγῳ, ἐν ᾧ περ καὶ αἱ ὁλκῆς ὑπεῖρχον πρὸς ἀλλήλας, πρὸς δὲ τὴν μετ' ἑαυτὴν μὲν τῷ βάρει, τῷ δὲ λοιπῶν μείζονα, ἕνεκα σταθμῶν ὑπαρχέσσαν, τὴν ἀφ' πεισάρων, ἀναλόγως τοῖς βάρεσι, καὶ ταυτὴν δὲ ὁπίτρειπον ἀνίκευς καταλαμβάνετο, ἡμιολίαν τὴν αὐτὴν φύσει ὑπέρχουσαν τῆς μικροτάτης. Τὰ γὰρ ἕνθα πρὸς τὰ ἐξ ὅσων ἔχει, ὅνπερ τρόπον, ἡ πᾶσι τὴν μικρὰν, ἡ ὁκτὼ, πρὸς μὲν τὴν ἐξ ἔχουσαν, ἐπιτρίτῳ λόγῳ ἦν πρὸς δὲ τὴν, τὰ δώδεκα, ἐν ἡμιολίᾳ. Τὸ ἄρα μετὰ ξὺ τῆς διαπάντε καὶ τῆς ἀφ' πεισάρων, τῷ τε-



τετέτι, ὅ ὑπερέχει ἢ ἀφ' πέτε τῆς ἀφ' τεσσάρων, ἐβεβαίω-  
 το ἐν ἐπογδῶ λόγῳ ὑπάρχειν, ἐν ᾧ περ τὰ ἑννα πρὸς τὰ ὀκτώ.  
 Ἐκατέρων τὴν ἀφ' πασῶν σύστημα ἐλέγετο, ἥτοι τῆς ἀφ' πέτε  
 καὶ ἀφ' τεσσάρων ἐν συναφῇ, ὡς ὁ διπλάσιος λόγος ἡμιολίς τε,  
 καὶ ἐπιτίττε· τοῖον δώδεκα ἑννα, ἕξ ἢ ἀναστροφῶς, τῆς ἀφ'  
 τεσσάρων καὶ ἀφ' πέτε, ὡς τὸ διπλάσιον ἐπιτίττε τε καὶ ἡμι-  
 ολίς. οἷον δώδεκα, ἑννα; ἕξ, ἐν τάξει τοιαύτη. Quæ quidem  
 ita vertit Meibomius. *adpendens quatuor chordas ejus-  
 dem materiæ existentes, tum æque longas, & æque cras-  
 sas, atque æque graves, singulis singula pondera appendit,  
 alligata ex inferiori parte. Cumque ita chordarum  
 longitudines omnino æquales effecisset, pulsans deinde bi-  
 nas atque binas simul chordas alternatim, consonantias  
 inveniebat ante dictas, aliam in alia combinatione. Nam-  
 que à maximo pondere tensam, ad eam, quæ à minimo,  
 diapason sonantem deprehendit. Erat autem illa duo-  
 decim quarundam librarum: hæc vero sex. Atque ita  
 in dupla ratione constituebat diapason consonantiam,  
 quam & ipsæ gravitates ostendebant. Rursus maxi-  
 mam ad juxta minimam, quæ octo librarum existebat  
 diapente consonantem invenit. Unde hanc in ratione  
 sesquialtera constituit: in qua & ipsæ inter se erant li-  
 bræ: Ad eam rursus quæ hanc sequitur, quod ad gra-  
 vitatem istâ minorem, sed reliquis majorem, quæ novem  
 pondo esset, ipsam diatessaron proportionaliter ipsis gra-  
 vitatibus. Atque hanc superquartam contra deprehen-  
 debat,*

debat, cum naturâ, eadem sesquialtera esset minimæ. Quippe novem ad sex ita habent, quemadmodum quæ juxta minimam est, octo libras habens, ad eam quidem, quæ sex habet, in ratione erat superquarta: sed ad eam, quæ duodecim in sesquialtera. Quod itaque est inter diapente & diatessaron, hoc est, quo diapente consonantia superat diatessaron, confirmatum est, in superoctava esse ratione, in qua novem ad octo. Porro diapason consonantia utrorumque systema dicitur: seu ipsius diatessaron & diapente, in conjunctione, ut dupla ratio systema est sesquialteræ, & supertertiae, in his numeris: duodecim, octo, sex: aut contra, ipsius diatessaron & diapente; ut duplum, supertertii & sesquialteri, utputa, in tali ordine, duodecim, novem, sex. In qua sane versione plurima sunt digna quæ carpantur. Verum ego ea tantum attingam, quæ præteriri nequeunt. Id ergo quod Nichomachus  $\iota\sigma\sigma\epsilon\acute{\rho}\phi\alpha\varsigma$  vocat, Meibomius æque graves vertit. Et ne fortè paulo lenius peccaret, mentem auctoris pervertendo, integram illam vocem, probam omnino & bonam, elidendam vult, aliamque intrudi, quæ ad rem nihil facit. Audi criticam ejus in notis ad hunc locum pag. nempe II. V. 25.  $\iota\sigma\sigma\epsilon\acute{\rho}\phi\alpha\varsigma$ . Hoc vocabulum malè hic in omnibus codicibus legi puto. Scriberem  $\iota\sigma\sigma\epsilon\acute{\rho}\phi\omega\upsilon$  vel  $\iota\sigma\sigma\alpha\acute{\epsilon}\theta\iota\mu\omega\upsilon$  æquilibres, ejusdem ponderis. Admodum in hoc experimento rectè capiendò circumspèctus fuit Pythagoras. quippe chordæ ejusdem debent esse 1. materiæ. 2. longitudinis 3. crassitiæ 4. ponderis. Uno horum requisitorum deficiente reliqua concidunt. Sed



Sed videris profecto Meibomio modo censuram de Musicis rebus ferre, quo cæcus de coloribus. Si enim Musicam unquam attigisses: non illam tantum quæ assa voce, ut veteres ajunt, sed quæ chordis perficitur; ignorare non poteras, hæc quatuor in chordis requiri, ut sint ejusdem materiæ, æqualis longitudinis, æqualis crassitiei & præterea *ἰσοςρόφως*, hoc est, *æquè contortas*. Si enim duæ chordæ, ejusdem materiæ, eandem longitudinem & crassitiem habuerint: etiam æqualia pondera habebunt: adeoque, si juxta tuam censuram scripsisset Nicomachus, superflua posuisset, necessariis omissis. Duarum enim chordarum, ejusdem materiæ, longitudinis, & crassitiei, si una magis altera contorqueatur: differentem sonum edunt: quod, filiis Musicorum, imò, lippis & tonsoribus notum est. Nec quisquam id ignorat, qui sciens vidensque res Musicas unquam attigit. Beatum te sane Criticum! qui ut nobis monstres, te egregie doctum esse, & Græce, & Latine, ac Musices præterea peritum, auctorem mutilas: & quæ optimè dicta sunt, evertis, ut vanis tuis meditationibus locus pateat. Si talis Critica admittenda est: nihil usquam, in bonis auctoribus fani habebimus: omnia corrupta erunt & putida. Sed neque in Latinis felicior es. Quid enim voces illæ tuæ *superquartus*, *supertertius* & *superoctavus*. Vocem *ἐπίτετρος* aliquando vertis *superquartus*, aliquando *supertertius*. Ergone hæc eadem tibi sunt, *superquartus* & *supertertius*?

Pp

Imò

Imò verò, maxime Grammaticæ, qvī Scaligerum, Kircherum aliosq; omnes Latina vis docere, eorumque heic famam atque existimationem denigrare cupis, revoca nunc tibi in memoriam, aureum illud Delphicum <sup>Γνωθι σεαυτόν</sup> *Nosce teipsum*. Apud quos enim veteres Latinos scriptores hæc legisti? Crediderim, apud eosdem, ubi voces tuas, *excessivas & defectivas*, hoc est, nusquam. Tuum enim *nullibi* usurpare nolim. Equidem non tam ridiculus sum, ut leges optimis ingeniis præscriptas velim, ne quicquam publici juris faciant, quod non omne juxta accuratas Grammaticorum præceptiones sit exactum. Quis enim tam stolidè audax est, ut optimas meditationes, & publice privatimque utilissimas, ideo premi censeret, quod mens rebus intenta, minutias hæc vel contempserit, vel fanè, tempus iis impendere noluerit? Imò, præter mentem aliquando quædam verba aliter cecidère. Scio, multos ista nunc agere, & laureolam in mustaceo, hac in parte, quærere. Sed qui nucem frangere nequeunt, corticem arrodunt: & qui nihil in rebus ipsis jure carpere possunt, in verbis ingenium ostentant: eo maximè infœlices, quo se, quàm maximè fœlices existimant. Si enim ipsimet quicquam haberent, quo se doctis, sapientibusque viris probare possent, haud ad tam vilia descenderent. Verùm, cùm Meibomius censoriam heic auctoritatem, in alios magnæ eruditionis viros exerceat, quorū vix umbram attingit: in memoriam illi revocare volebam



bam Catonis illud. *Turpe est doctori, cum culpa redarguit ipsum.*

Et quam frigidum illud est, quod Scaligero in præfatione libri sui objicit. Verba ejus integra adscribam, ut τύπον hominis videas. *Quam enim turpe est, quod Jos. Scaliger, vir in Græcis & Latinis literis summus, ὀρθογώνιον ὑπὸ AB. BC. interpretatus sit, Clavi-um, aliosque, etiam doctos viros, sequendo, rectangulum sub AB. BC. cum vertendum esset, rectangulum ab AB, BC. nempe contentum, περιεχόμενον. quod verbi, brevitatæ causa, Mathematici omittunt, ut & plerumque vocabulum ὀρθογώνιον rectangulum. Sed ad hujusmodi notanda nunc non descendemus. Quod si illa, quæ ex antiquis perperam versa sunt, etiam à solertissimo Mathematico, Federico Commandino, Græcæ linguæ mediocriter perito, examinare vellem: rebus Mathematicis non parvam lucem me allaturum sperarem. Sed quæsumus te Marce Meibomii, ne res Mathematicas attingas ulterius. Hoc enim opere tuo, magnas tenebras apud imperitos rerum, veritati offudisti. Et nisi meliora fuerint, quæ contra Commandinum habes, quam quæ contra Jos. Scaligerum: rectius tibi consules, si tacueris. Ast quid haberes? cum hæc tua selectiora, nive Schytica frigidiora sint. Turpe ais esse, quod Scaliger ὀρθογώνιον ὑπὸ AB. BC. interpretatus sit, Rectangulum, sub AB. BC. Nempe, ignorabas id, quod Scaliger, non minus, quam Mathematici cognitum habent; aliud Græcis scriptoribus esse τὸ ὑπὸ*

Pp 2

AB.

AB. BG. aliud τὸ ἀπὸ AB. Τὸ ὑπὸ AB. BG. denotat quodcun-  
 que rectangulum : τὸ ἀπὸ AB. solum quadratum. Ita  
 Euclides Elem. libro. X. Propositione XXV. & XXVI.  
 Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμετρῶν εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώ-  
 νιον, μέσον ἔστιν. Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμετρῶν εὐθειῶν  
 ἔστω AB. BG. περιεχέσθω ὀρθογώνιον, τὸ AG. λέγω, ὅτι τὸ AG  
 μέσον ἔστιν. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνιον τὸ  
 A Δ μέσον ἄρα ἔστι. Quod juxta verba ipsa ita verten-  
 dum est. *Quod sub mediis longitudine commensurabili-  
 bus rectis lineis comprehenditur rectangulum, medium est.  
 Sub mediis enim longitudine commensurabilibus rectis li-  
 neis AB BG contineatur rectangulum AG: dico, quod AG me-  
 dium sit. Describatur enim ab AB quadratum. A Δ ergo  
 medium erit. Eundem usum harum vocum habes se-  
 quenti Propositione. Brevius autem hæc habentur  
 apud Archimedem, demonstratione Prop. VIII. libri  
 II. de Sphæra & Cylindro. Verba sunt ἑλάσσον ἄρα  
 τὸ ὑπὸ τῆς θζῆς τῶς ἀπὸ ζκ'. Τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς θζῆς πρὸς τὸ ἀπὸ  
 ζκ' τέστιν ἢ ζθ πρὸς ζή ἑλάσσονα λόγον ἔχει, τῶς ὅν ἔχει τὸ ἀπὸ  
 τῆς κ'ζ, πρὸς τὸ ἀπὸ ζή. τὸ δὲ ἀπὸ κ'ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζή διπλα-  
 σίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ κ'ζ πρὸς ζή. Minus ergo id, quod  
 sub θζῆς eo quod ab ζκ' (comprehenditur). Id ergo quod  
 sub θζῆς ad illud, quod ab ζκ', hoc est, ζθ, ad ηζ; minorem ha-  
 bet rationem, quàm id, quod ab κ'ζ, ad id, quod ab ζή.  
 Quod vero ab κ'ζ (comprehenditur) habet ad illud, quod  
 ab*



ab ζη, duplicatam rationem, quam κζ ad ζη. τὸ ὑπὲρ denotat rectangulum quodcunque: τὸ ὑπὲρ solum quadratum. quod plurimis aliis locis liquet. Scaliger ergo aliique Geometræ, distinctas res distinctis vocibus explicuere. Neque dubito si Grammaticos consulas, citius concedent, *comprehendi sub* Latinum esse, quam tuas illas voces, *supertertius, superoctavus & excessivas ac defectivas*. Imò, quid si dicent *comprehendi sub* æquè Latinum esse, ac *comprehendi ab*: & vel neutrum, apud optimos scriptores Latinos exstare, vel utrumque? Quod si hæc, Latinè melius verba volueris: Commandinus ille, quem carpis, eleganter quidem locum Euclidis translatus tibi dabit; ut infelicem planè illum esse oporteat, qui te interpretem post Commandinum desideret. Sed de his tuis erroribus Meibomi, ipsemet prius eum Grammaticis transige: antequam viros doctissimos, tantæque eruditionis, ut in his minutiis eruditionem nec ponant, nec quærant, leges injussus privatusque præscribere audeas.

Ut vero ad rem revertamur, deprendit Pythagoras, in omnibus sonis, duplam tensionem, sive in chordis, sive in tibiis, sive alio quocunque instrumento factam, semper harmoniam dare διὰ πρῶτων, seu octavam, hoc est, quæ inter *ut & ut, re & re, sol & sol* consideratur. Sesequialteram vero tensionem, harmoniam dare διὰ πέντε seu quintam, *ut sol, re la*. Sesequitertiam autem, harmoniam dare διὰ τεσσάρων, seu quartam, *ut fa,*

*resol, mila.* Ex divisione autem rationis sesquialtera per sesquitertiam, fit ratio sesquioctava. Reductis enim binis rationibus 3 ad 2, seu sesquialtera, & 4 ad 3, seu sesquitertia, ad commune consequens, ita ut sesquialtera sit 9 ad 6, sesquitertia 8 ad 6: si 9 ad 6 dividatur per 8 ad 6, facta ratio erit 9 ad 8, seu sesquioctava. Inter διατεσσάρων autem & διαπέντε, seu quartam & quintam, intervallum est integrum: amboque toni integri. Ergo pro integro tono ponatur ratio *ἐπὶ γδοος* seu sesquioctava. Adeoque dato primo tono *ut*, pro secundo tono *re*, sumatur tensio *ἐπὶ γδοος* sesquioctava. ut si tensio prima partium fuerit 192: tensio pro *re*, erit 216. ratio enim 216 ad 192 est, ut, 9 ad 8, seu sesquioctava. Rursum pro integro tono *mi* sumatur proximè antecedentis tensionis sesquioctava, hoc est, sumatur tensio 243 partium talium, qualem tensio *re* est partium 216. Ratio enim 243 ad 216, est, ut 9 ad 8, seu sesquioctava. Quod si ratio sesquitertia dividatur per rationem duplicatam rationis sesquioctavae, hoc est, per rationem 81 ad 64: habebimus differentiam tensionis *mi* & *fa*. Nempe reducantur rationes 4 ad 3, seu sesquitertia, & ratio 81 ad 64, seu duplicata rationis sesquioctavae, ad commune consequens: erit ergo ratio 256 ad 192 sesquitertia: ratio autem 243 ad 192, duplicata rationis sesquioctavae, seu ut 81 ad 64. Ratio ergo facta ex divisione rationis 256 ad 192, seu sesquitertiae per rationem 81 ad 64, duplicatam rationis sesquioctavae est 256 ad

243:



243 : quæ multo minor est ratione sesquioctava. Ratio enim 273 fere ad 243, est sesquioctava. Hanc ergo partem vocarunt Musici *λείμμα*.

Atq; ex his intelligitur pulcherrimus ille Platonis locus, qui est in Timæo, seu libro de Universo: quem quidem librum, tanti fecit Cicero, ut integrum in Latinam linguam transfunderet: cujus versionis insigne fragmentum adhuc exstat. Locus autem Platonis hic est. Μιγνὺς δὲ μέλα τῆς εἰσίας, καὶ ἐκ τριῶν ποιησάμεν. Ἐν, πάλιν ὅλον τὸ εἰς μέρους ὅσας προσήκε διένειμεν· ἐκστὴν δὲ ἐκ τῆ ταυτῆς, καὶ πατέρος, καὶ τῆς εἰσίας μεμιγμένην ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ὧδε. Μίαν ἀφείλε το πρώτον ἀπὸ παντός· μετὰ δὲ ταύτην ἀφήρει διπλασίαν ταύτης· τὴν δ' αὖ τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης, τετάρτην δὲ, τῆς δευτέρας διπλῆν. Πέμπτην δὲ, τριπλῆν τῆς τρίτης, τὴν δὲ ἑκτὴν τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν. ἑβδόμην δὲ, ἐπτακαμικοσαπλασίαν τῆς πρώτης. Μετὰ δὲ ταῦτα, ξυνεπλήρωσε τὰ τε διπλάσια, καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκείθεν ἀποτέμων, καὶ πλεῖς εἰς τὸ μέγα ζυγῶν, ὅτε ἐν ἐκάστῳ διαστήματι δύο ἔσονται μεσότηας, τὴν μὲν, ταυτῶ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχόμενην. τὴν δὲ ἴσῳ μὲν καὶ ἀληθὺς ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχόμενην. Ἡμιολίων δὲ διατάσεων, καὶ ἐπιτρίτων, καὶ ἐπογδῶν γενομένων, ἐκ τῶν τῶν δεσμῶν, ἐν ταῖς πρόσθεν διατάσεσι, τῶ τῶ ἐπογδῶν διαστήματι, τὰ ἐπιτελεῖ πάντα ξυνεπληρῶτο, λείπων

αυ-

αὐτῶν ἕκαστὸν μόνον, τῆς τῶ μόνου πάντης διαστάσεως ληφ-  
 θείσης, ἀριθμῶν πρὸς ἀριθμὸν ἔχουσι τὰς ὁρὰς ἐξ ἡ πενήκοντα  
 καὶ διακοσίων, πρὸς τρία καὶ τετραράκοντα καὶ διακόσια. Quæ  
 quidem ita Latine protulit Cicero libro de Universo.  
*permiscens cum materia, cum ex tribus effecisset unum,*  
*id est primum in ea quæ decuit membra partitus est. Jam*  
*partem singulas ex eodem et altero, et ex materia tempe-*  
*rauit. Fuit autem talis illa partitio. Unam principio*  
*partem detraxit ex toto: secundam autem, primæ partis*  
*duplam: deinde tertiam, quæ esset secundæ sesquialtera,*  
*primæ tripla: deinde quartam, quæ secundæ dupla esset:*  
*quintam inde, quæ tertiæ tripla: tum sextam, octuplam*  
*primæ: postremo septimam, quæ septem et viginti par-*  
*tibus antecederet primæ. Deinde instituit dupla et tri-*  
*pla intervalla explere, parteis rursus ex toto dissecans:*  
*quas intervallis ita locabat, ut in singulis essent bina me-*  
*dia: vix enim audeo dicere medietates, quas Græci μεσότητες*  
*appellant: sed quasi ita dixerim intelligatur: erit enim*  
*planius. earum alteram eadem parte præstantem extre-*  
*mis, eademque superatam: alteram pari numero præ-*  
*stantem extremis, parique numero superatam. Sesqui-*  
*alteris autem intervallis, et sesquitertiis, et sesquiocta-*  
*vis sumptis ex his colligationibus in primis intervallis,*  
*sesquioctavo intervallo, sesquitertia omnia explebat, cum*  
*particulam singulorum relinqueret. Ejus autem parti-*  
*culæ intervallo, habebat numerus ad numerum eandem*  
*proportionem comparisonemque in extremis, quam ha-*  
*bent*



bent CCLVI. cum CCXLIII. Nempe harmoniam Universi explicaturus Plato eandem in toto esse existimavit, quæ in omnibus & singulis partibus animadverterat. Et cum omnia ex numero, pondere, ac mensura constent; numerus autem omnis, vel par sit, vel impar: omnia autem corpora, superficiem habeant & soliditatem, quæ per quadrata & cubos optimè explicantur: ex unitate, quæ tam in singulis corporibus, quam in toto conspicitur, & ex binario, inter pares numeros primo, & ex ternario primo impari numero, horumque quadratis & cubis, omnium naturam dependere affirmavit. Quippe, cum & totum Universum unum sit, & singula in hoc universo unum: omnia autem ex plurimis corpusculis componantur, quæ rursus ex aliis corpusculis coagmentantur, partim numero paribus, partim imparibus: coagmentata autem, unum corpus generant, superficie & soliditate præditum: corpus ergo hoc natura unum, ex paribus & imparibus numeri quadratis cubisque constat: adeoque, & duplum habet, & triplum, & quadruplum, & noncuplum, & octuplum, & vigecuplo septuplum. Intervalla autem hæc dupla triplaque, eo modo sunt disposita, & ita inter se combinata, ut convenientiam invicem habeant, gratamque harmoniam faciant: quod experimento, in omnibus corporibus sumpto demonstratur. Erunt ergo intervalla hæc mediæ, quibus quibusdam harmonicis conjuncta, quarum quidem una, eadem parte minus extremum excedit, quæ

Qq ab

ab altero extremo superatur : altera aurem medietas eodem numero ab uno extremo superatur, quo alterum excedit. Ut si minus extremum fuerit 6, majus, duplum hujus, erit 12. medietas autem inter duo hæc extrema 8 & 9. Excedit autem octonarius senarium tertia parte senarii. nempe binario, qui est triens senarii : à duodenario autem superatur octonarius quaternario, qui est triens duodenarii : adeoque octonarius tertia parte senarii excedit senarium, tertia autem parte duodenarii excedit à duodenario : hoc est, eadem parte extremorum excedit & exceditur. Novenarius autem excedit senarium ternario : exceditur autem à duodenario, etiam ternario, hoc est, eodem numero excedit & exceditur. Inter binas autem hæc medietates ratio est *ἐπὶ γδοὺς* seu sesquioctava. Unde positis hisce binis : cætera spatia sesquioctavis explentur. Adeoque, secundus tonus est sesquioctavus primi : tertius autem, sesquioctavus secundi. Quartus autem tertii sesquioctavus non est : sed rationem habet in numeris, quam 256 ad 243. cujus causa antea à nobis fuit explicata. Rursum, inter sesquialteram & duplam, ponitur sesquioctava : & rursum, hujus sesquioctava. Adeoque, posito in medio sesquitercio, cætera omnia sesquioctavis explentur. Id autem in numeris plenius explicatur : ponendo primum numerum 384. qui enim ante ipsum numeri, omnes hæc proportionem non admittunt. Sumatur enim dimidius hujus 192. erit ergo sonus 384 ad 192 *διὰ πρῶτον*.

Pri-



Primus autem ἐπὶ γ' δόος est 216 seu *re*. Est enim 216 sesquioctavus numeri 192. Illius autem sesquioctavus seu *mi* est 243. Primi autem numeri sesquitertius est 256. Græcis διατεσσαέρων vulgo *fa*. Hujus autem sesquioctavus, primi vero sesquialter est 288, διαπέντε seu *sol*: cujus sesquioctavus est 324. *la*. Hujus autem sesquioctavus non datur.

Posito autem 384 primo numero, erit sesquioctavus, seu *re*, 432: & hujus sesquioctavus, seu *mi*, 486. & sesquitertius primi, seu *fa*, 512. & sesquioctavus hujus, vel primi sesquialter, qui est *sol*, 576. Græcis διαπέντε: hujusque sesquioctavus *la* 648. & hujus rursus sesquioctavus *si* 729. denique duplus primi, quarti vero sesquialter, & quinti sesquitertius est 768 διαπασών, seu octava *ut*. Ob quam etiam causam Timæus Locrus apud Platonem hunc numerum animæ mundi tribuit, primamque vocat: ὡς μὴ ἀγνοεῖν ἐξ ὧν ἡ ψυχὰς καὶ δι' ὧν συνεστάχει, ἀν' ἧς ὑπέρεχον τὰς σωματικὰς ἑστίας συνετάξατο ὁ Θεός, ὥσπερ λέγουμες ἄμμες (πρότερον γὰρ τὸ πρῶτον καὶ δυνάμει καὶ χρόνῳ) ἀλλὰ πρεσβυτέρων ἐποίησε, μίαν ἀφαιρέων τὰν πρῶτον, μονάδων ἑσάν τε πόρων πολὺ ὅκτω δέχασιν, καὶ τριπλὴν ἐκτέτασιν. Ut quidem minimè incognitum esse possit, ex quibus, & per quæ hæc (mundi) anima constituta: quam, non ultimam ordinavit Deus post corpoream istam essentiam, ut nos affirmamus: (illud enim quod honoratius est, & potestate, & tempore prius) sed antiquiorem creavit, unam hanc primam auferens, quæ unitatum erat quatuor,

29 2

8 octo

& octo præterea denariorum, & trium centenariorum hoc est in numeris CCCLXXXIV. Has autem medietates Theo Smyrnæus certam quendam *ἀναλογίαν* seu proportionem generare dicit, ab *ἀναλογία* illa quam Geometræ considerant diversam. Quem secuti postea auctores Latini, proportionum varia genera fecerunt, & aliam quidem vocarunt Geometricam, quando eadem est ratio unius extremi ad medium, quæ, medii ad alterum extremum: aliam Arithmeticam, quando eodem numero, & majus extremum excedit medium, & medium excedit minus extremum: aliam Musicam, quando, eadem sui parte, majus extremum excedit medium, quia extremi minoris parte medium excedit minus extremum. Equidem non multis heic disputabo, an benè & commodè, vel à Theone Smyrnæo, vel ab aliis Geometris, hæ proportionες vocentur? Neque enim de vocibus cum aliquo contendere voluerim. Sufficit enim nobis, quod intelligamur. Id tamen indicatum Lectori velim, me quando proportionem simpliciter nomino, semper, ex Veterum Geometrarum more, eam intelligere *ἀναλογίαν* quæ vulgo Geometrica appellatur. Et de hac intelligendi sunt Veteres Geometræ, quando *ἀναλογίαν* nominant. Quod, si Meibomius diligentius observasset, aliquot forte errores vitasset, ut jam statim demonstrabimus.

CAP.



## CAP. XIV.

Ex iis autem quæ hucusque de compositione & divisione rationum, diligentius atque accuratius disputavimus: hoc inter alia liquet; auctis antecedentibus quarumcunque rationum; ipsas rationes augeri: & antecedentibus imminutis; etiam ipsas rationes diminui. Nempè, quocunque modo, antecedens augetur, eodem retento consequente; ratio ipsa componitur: & quocunque modo, antecedens imminuitur; ratio ipsa dividitur. Mutato autem ordine, in ea compositione quæ fit multiplicando, si consequentia diminuantur, antecedente eodem retento; ratio ipsa diminuitur: si vero consequentia augeantur; ipsa ratio imminuitur. In ratione enim  $\zeta\nu$  ad  $\phi\varepsilon$  si antecedens  $\zeta\nu$  augeatur, fiatque æqualis ipsi  $\sigma\mu$ ; erit ratio eadem quæ  $\sigma\mu$  ad  $\phi\varepsilon$ . At  $\sigma\mu$  ad  $\phi\varepsilon$  est duplicata rationis  $\zeta\nu$  ad  $\phi\varepsilon$ , adeoque major. Unde aucto antecedente  $\zeta\nu$  & æquali constituto ipsi  $\sigma\mu$ : erit ratio ipsa aucta. Quod si in eadem ratione,  $\zeta\nu$  ad  $\phi\varepsilon$ , consequens imminuatur, fiatque æquale ipsi  $\theta\delta$ , erit ratio facta æqualis rationi  $\zeta\nu$  ad  $\theta\delta$ . Hæc autem dupla est rationis  $\zeta\nu$  ad  $\phi\varepsilon$ , adeoque major.

Eodem modo in ratione defectûs  $\phi\varepsilon$  ad  $\sigma\mu$ , si  $\phi\varepsilon$  antecedens terminus augeatur, fiatque æqualis ipsi  $\zeta\nu$ : erit ratio  $\zeta\nu$  ad  $\sigma\mu$ , duplicata rationis  $\phi\varepsilon$  ad  $\sigma\mu$ , ut capite XII. demonstravimus: adeoque major ratione  $\phi\varepsilon$  ad  $\sigma\mu$ . Si vero consequens imminuatur, etiam ra-

Qq 3.

tio

ratio aucta erit. Ut, in ratione  $\phi\epsilon$  ad  $\sigma\mu$ . si consequens terminus  $\sigma\mu$  imminuatur, fiatque æqualis ipsi  $\zeta\nu$ , erit ratio facta æqualis  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ . Est vero ratio  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$  duplicata rationis  $\phi\epsilon$  ad  $\sigma\mu$ . ut demonstratum fuit cap. *XII*. ergo & ratio facta erit major.

Quod si antecedens imminuatur, aut consequens augeatur: ipsa ratio minor fiet. In ratione enim excessus  $\sigma\mu$  ad  $\phi\epsilon$ , si antecedens terminus  $\sigma\mu$  imminutus, æqualis fiat ipsi  $\zeta\nu$ , erit ratio facta æqualis rationi  $\zeta\nu$  ad  $\phi\epsilon$ . Est vero ratio  $\zeta\nu$  ad  $\phi\epsilon$  minor quam  $\sigma\mu$  ad  $\phi\epsilon$ , utpote ejusdem subduplicata. Ergo & facta hoc modo ratio minor erit. Aucto autem consequente  $\phi\epsilon$ , & æqvato ipsi  $\zeta\nu$ , erit ratio facta æqualis  $\sigma\mu$  ad  $\zeta\nu$ , quæ minor est ratione  $\sigma\mu$  ad  $\phi\epsilon$ , utpote ipsius subduplicata. Hoc ipsum in rationibus defectûs locum habet. In ratione enim  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ , si antecedens imminuatur, fiatque æqvale ipsi  $\theta\delta$ , erit ratio facta æqualis rationi  $\theta\delta$  ad  $\zeta\nu$ , quæ minor est ratione  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ , utpote subduplicata ejusdem. Si vero in eadem ratione  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ , consequens terminus  $\zeta\nu$  augeatur, fiatque siqvalis ipsi  $\sigma\mu$ : ratio facta erit æqualis rationi  $\phi\epsilon$  ad  $\sigma\mu$ , quæ minor est ratione  $\phi\epsilon$  ad  $\zeta\nu$ , utpote subduplicata ejusdem. Atque hoc in omni antecedentium augmento, consequentiûmve decremento; tum quoque in omni antecedentium decremento, consequentiûmve augmento, eodem modo se habet. Id ipsum enim, quod in ratione duplicata & subduplicata contingit, etiam in cæteris omnibus contingit tam triplicata & subtriplicata, quam



quam quadruplicata, sesquuplicata, & sic in infinitum :  
cujus rei demonstratio ex capite *XII* petatur.

Quibus explicatis, facile intelligitur, quæ ratio  
major sit : & quæ minor? Nempe, si data quæcunque  
rationes, ad idem consequens reducantur; cujus an-  
tecedens majus est, illa ratio major : cujus verò ante-  
cedens minus est, illa ratio minor. Sumantur enim in  
figurâ *XIX* duæ rationes,  $\rho\beta$  ad  $\phi\epsilon$ , &  $\phi\mu$  ad  $\pi\nu$ , re-  
ducanturq; ambæ ad commune consequens, nempe  $\phi\epsilon$ ,  
sitq; ut  $\phi\mu$  ad  $\pi\nu$ , sic  $\theta\delta$  ad  $\phi\epsilon$  erit ergo ratio  $\rho\beta$  ad  $\phi\epsilon$  minor  
quàm  $\theta\delta$  ad  $\phi\epsilon$ , cum antecedens illius, minus sit antecede-  
te hujus: adeoq; ratio  $\rho\beta$  ad  $\phi\epsilon$  minor erit ratione  $\phi\mu$  ad  $\pi\nu$ .

Est ergo hæc brevissima atq; expeditissima metho-  
dus inveniendi, in datis quibuscunque rationibus,  
quæ inter eas major sit, & quæ minor. Reducantur  
ambæ ad idem consequens : & tùm illa ratio minor e-  
rit, cujus antecedens minus : illa autem major, cujus  
antecedens majus. Atquæ hoc non tantum verum  
est, quando duæ rationes excessûs, aut duæ rationes  
defectûs comparantur invicem : sed etiam, quando  
ratio excessûs comparatur cum ratione defectûs, &  
contra. Eadem enim ratio obtinet, neque minori id  
evidentia demonstratur. Cum enim in omnibus ra-  
tionibus excessûs antecedens majus sit consequente :  
in rationibus verò defectûs antecedens minus sit con-  
sequente : ergo reductis binis talibus quibuscunque  
rationibus ad idem consequens, erit ratio excessûs  
semper major ratione defectûs. Equidem, quamvis  
hoc

hoc ipsum per se satis clarum sit : alia tamen demonstratione , id ipsum, clarius explicabo. Constat ex iis quæ hucusque fuerè demonstrata , in omnibus rationibus, tam excessûs quam defectûs , quo majora fuerint antecedentia, eo majores esse rationes : & quo minora fuerint antecedentia , eo minores esse rationes. Adeoque, ratio dupla minor est quam tripla, & hæc quam quadrupla, Eodem modo, ratio subdupla major est quam subtripla , & hæc, quam subquadrupla. Subdupla enim ratio est, quando antecedens consequentis dimidium fuerit, adeoque, consequens antecedentis duplum. Subtripla autem, quando antecedens tertia pars seu triens fuerit consequentis, adeoque consequens triplum antecedentis. Sic in ratione subquadrupla consequens antecedentis est quadruplum. At quò majus consequens, eodem retento antecedente : eo minor ratio. Subquadrupla ergo ratio, minor quam subtripla : & hæc, quam subdupla. Sit enim  $\phi\chi$  in fig. XIX dupla ipsius  $\theta\lambda$ , tripla autem ipsius  $\zeta\nu$ , quadrupla autem ipsius  $\alpha\eta$ . Ratio ergo  $\alpha\eta$  ad  $\phi\chi$  minor erit quam  $\zeta\nu$  ad  $\phi\chi$  : &  $\zeta\nu$  ad  $\phi\chi$  minor erit quam  $\theta\lambda$  ad  $\phi\chi$  : cum  $\alpha\eta$  antecedens sit minus quam  $\zeta\nu$ , &  $\zeta\nu$  antecedens minus quam  $\theta\lambda$ . Est vero  $\alpha\eta$  ad  $\phi\chi$  subquadrupla,  $\zeta\nu$  autem ad  $\phi\chi$  subtripla, & denique  $\theta\lambda$  ad  $\phi\chi$  subdupla. Ratio ergo subquadrupla est minor quam subtripla, & hæc minor quam subdupla. Atque sic in infinitum. Comparantur nunc invicem rationes duæ, una excessûs, altera defectûs : nempe, tripla cum sub-



subtripla, & dupla cum subdupla, seu dimidia. Jam neminem ego adeo mente captum arbitror; ut dimidiam rationem seu subduplam, dupla majorem dicat: adeoque nec subtriplam tripla. Marcus quidem Meibomius, contra communem mentis intellectum, dimidiam rationem seu subduplam æqualem ait esse duplæ: majorem autem dicere non audet. Et sane, quis mortalium, istum hominem sanâ mente præditum, arbitretur? qui, dimidium alicujus magnitudinis, ejusdem, vel æqualis magnitudinis, duplo, æquale majusve diceret. Verum de ista Meibomii absurda opinione postea agemus. Nunc illud tantum supponimus, rationem dimidiam seu subduplam non esse majorem ratione dupla: neque subtriplam, majorem tripla, & sic in infinitum. Dico autem, rationem subduplam, neque æqualem esse duplæ: neque subtriplam, triplæ. Ideoque; cum neque æqualis sit; neque major: ergo minor erit. Et subtriplam quidem rationem tripla esse minorem, ita demonstratur. Cum enim ratio subdupla, ratione duplâ major non sit; sed vel minor, vel ex falsâ Meibomii sententia eidem æqualis: erit utique ratio subdupla, minor ratione tripla; quandoquidem ratio dupla, minor est ratione tripla. Atqui ratio subtripla, minor est ratione subdupla: quandoquidem, hujus antecedens, si ambæ rationes ad commune consequens reducantur, majus sit, antecedente alterius. At quarum rationum antecedentia, respectu ejusdem consequentis, sunt ma-

R r

jora;

jora; illæ etiam rationes sunt majores: & quarum antecedentia sunt minora, illæ etiam rationes sunt minores\* ut principio hujus capituli demonstratum fuit. Ratio ergo subtripla, cum minor sit ratione dupla, etiam minor erit ratione triplâ: cum subdupla ratio minor sit ratione triplâ. Eodem plane modo, ratio subdupla demonstratur, minor esse ratione dupla. Sumptis enim binis rationibus, una excessus, altera defectus, nempe sesquialtera & subsesquialtera: erit ratio sesquialtera minor ratione duplâ: adeoque, & subsesquialtera minor erit ratione dupla. Ratio autem subdupla, minor est ratione subsesquialterâ; cum hujus antecedens, respectu ejusdem consequentis, majus sit antecedente illius. Ratio ergo subdupla, minor est ratione duplâ.

Facile ergo ex his perspicitur: quid æqualis ratio sit, & quæ major, quæve minor? Nempe, reductis, datis quibuscunque binis rationibus, ad idem consequens: si antecedentia æqualia fuerint; erunt rationes æquales: si vero inæqualia; illa ratio minor, cujus antecedens minus: illa vero major, cujus antecedens majus. Quod in omnibus omnino rationibus verum esse, hucusque demonstravimus. Euclides autem, vel si mavis Eudoxus (cujus, librum quintum Elementorum esse, auctor scholii illius in V. librum testatur) aliam plane definitionem rationum æqualium & inæqualium nobis dedit; longe quidem eâ obscuriorem, quam proposuimus: veram tamen ac minime fal-



falsam, prout contra Meibomium nunc monstrabimus. Et de æqualium quidem rationum definitione, quas Euclides vel Eudoxus easdem vocat, nullam nobis litem movet Meibomius. Quoniam tamen posterior definitio rationum inæqualium, seu majorum minorumque, ex illa debeat explicari: utramque Geometrice demonstrabimus.

## CAP. XV.

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι ὁρῶντες ὁρῶντες, δὲ ἄλλοι, καὶ τρεῖς ὁρῶντες τρεῖς, ὅταν τὰ τῶν ὁρῶντες καὶ τρεῖς ἰσότης πολλαπλάσια, τῶν τῶν δευτέρων καὶ τρεῖς ἰσότης πολλαπλάσιον καθ' ὅποιον πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκάτερος, ἢ ἅμα ἴσα ἢ, ἢ ἅμα ὑπερέχει ληφθέντα κατ' ἀλλήλα. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλεῖσθαι. Ὅταν δὲ τῶν ἰσότης πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τῶν ὁρῶντες πολλαπλάσιον ὑπερέχει τῶν τῶν δευτέρων πολλαπλάσιον, τὸ δὲ τῶν τρεῖς πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχει τῶν τῶν τρεῖς πολλαπλάσιον, τότε τὸ ὁρῶντες ὁρῶντες τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, εἰπὲς τὸ τρεῖς ὁρῶντες τὸ τρεῖς.

*In eadem ratione, magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam, & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiples, secundæ & quartæ æque multiples, juxta quamcunque multiplicationem, utraque utrâque, vel una superant, vel una æquales sunt,*

Rr 2

vel

vel una deficiunt inter se comparatæ. Quæ vero, eandem habent rationem, magnitudines, proportionales vocentur. Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem primæ superaverit multiplicem secundæ: multiplex vero tertiæ non superaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicitur, quam tertia ad quartam. His verbis definitio rationum æqualium & inæqualium ab Euclide libro V. Elementorum concipitur. Notandum autem est, ea verba, quæ in prior definitione rationum, nempe, æqualium seu earundem, reperiuntur, καὶ ὁποίων πολλαπλασιασµῶν juxta quamcunque multiplicationem, etiam in posteriore definitione esse repetenda: cum aliàs ipsa definitio nimis sit angusta: quod ipse quoque Meibomius verum supponit. Id vero mirari satis nequeo, quid, vel Euclidem, vel Eudoxum moverit, ut definitionis loco hæc supponeret: alia vero hinc demonstraret longè his clariora. Quia quidem in re ejusdem criminis accusari potest, cujus in prior libro reum ex Proclo peregrinus Apollonium: nempè, quod dum res manifestas demonstrare conatur, ea quæ magis obscura sunt, & quorum veritates minus perspicuæ, cogatur supponere. Definitiones enim Geometricæ explicant paucis tantum verbis, iisque perspicuis, quid illud sit quod definimus. Et tales nostræ sunt, capite hujus libri VII. *Æquales rationes dicuntur, quæ se invicem, nec majores sunt, nec minores.*



*minores. Ratio autem, altera ratione major dicitur, quæ æqualem excedit. Minor vero quæ ab æquali deficit. Quod autem antecedentia æqualium rationum juxta quamcunque multiplicationem æquemultiplicata simul excedant consequentium æquemultiplices; inæqualium vero rationum non item: id demonstratione quadam & explicatione satis operosa indiget. Saltem, obscurius hoc est, quam illud, quod inter propositiones V. libri Elementorum demonstratur, *Æqualia ad idem eandem habere magnitudinem*. Atque hac quidem in parte non ab omni culpa liber est auctor hujus operis, siue Euclides is est, siue Eudoxus. Neque tamen hæc movet Meibomius; sed unam ex hisce definitionibus falsam esse ait, nempe rationum inæqualium. Equidem Euclides solam majorem rationem definit: minoris vero naturam ex opposito intelligi vult. Quod autem malè falsitatis à Meibomio accusetur, id nunc demonstrabimus. Et ut hæc quoque ab Euclide præter leges Geometricas allata certam demonstrationem habeant: tres hæc Propositiones in medium adducam; quæ si Geometris placuerint: Euclideis pro explicatione adjungantur.*

## PROPOSITIO I.

*Si duæ quæcunque finitæ magnitudines æquemultiplicentur; habebunt earum æquemultiplices eandem inter se rationem, quam magnitudo ad magnitudinem: & multipulum primæ magnitudinis, ad primam magnitudinem*

R r 3

nem

*nem, eandem habebit rationem, quam, multipulum secundæ magnitudinis, ad secundam.*

Sint enim, in diagrammate hujus libri XX, AE & AD quæcunque magnitudines, quæ, æquemultiplicatæ, faciant quascunque magnitudines, v. g. AF & AG, vel AH & AI, vel AK & AL, vel denique AC & AB: dico, ut, AE ad AD, sic AF ad AG, & AH ad AI, & AK ad AL, & AC ad AB. Vel enim AE, æquatur ipsi AD, vel non æquatur. Si æquatur: ergo per Axioma VI. libri I. Elem. æquemultiplicia eorum inter se erunt æqualia. Eodem enim jure, quo ejusdem vel æqualium magnitudinum dupla, inter se sunt æqualia, etiam tripla erunt æqualia, & quadrupla, & decupla, & millecupla, & sic in infinitum. Si vero inæqualia fuerint: unum ergo majus erit, alterum minus. Sit AE major magnitudo; AD autem minor: erectaque ex D perpendiculari quacunque, ita ut angulus ad D sit rectus; jungantur AE & AD circa A: ita ut faciât, cum perpendiculari, triangulum AED. Multiplicetur nunc linea AD, ita ut duplum ejus sit AG, triplum AI, quadruplum AL, & sic in infinitum. Producaturs AE versus E infinite v. causa in M. eductisque ex G. I. L. B. perpendicularibus usque dum fectent AM. infinite eductam: dico singula segmenta, dare duplum, triplum, quadruplum, quintuplum ipsius AE: hoc est, perpendicularem ex G secare AM. in F, ita ut AF sit dupla ipsius AE: perpendicularem vero ex I secare AM in H, ita ut AH sit tripla ipsius AE,



AE, sicut AI est tripla ipsius AD, Atque eodem modo perpendicularem ex L. secare AM in K: ita ut AK sit quadrupla ipsius AE. rursumque perpendicularem ex B secare AM in C, ita ut AC sit quintupla ipsius AE. Quoniam enim DE. GF. IH. LK. BC sunt perpendiculares ejusdem rectæ AB: ergo inter se omnes sunt parallelæ: adeoque erit, ut AD ad AG, sic AE ad AF: & ut AD ad AI, sic AE ad AH: & sic in sequentibus. Vel, alia methodo, jungantur EG & DF. quoniam ergo triangula hæc EFD, & EGD sunt in eadem basi ED, & inter easdem parallelas ED. FG: erunt triangula invicem æqualia. Est vero triangulum AED, etiam æquale triangulo EGD, utpote in eadem altitudine, & in æqualibus basibus. AG enim dupla est ipsius AD, adeoque DG æqualis ipsi AD. Quæ autem eidem æqualia, etiam invicem sunt æqualia. Est ergo triangulum EFD æquale triangulo AED. Sunt vero in eadem altitudine. erunt ergo & bases æquales per I. Sexti Elem: adeoque EF æqualis ipsi AE. Tota ergo AF erit dupla ipsius AE. Jungantur porro EI & DH. quoniam ergo triangula EID, & EHD sunt inter easdem parallelas ED & HL, & super eadem basi ED, erunt invicem æqualia. Est vero triangulum EID duplum trianguli ADE. Sunt enim in eadem altitudine: adeoque, se habent invicem, ut bases. DI autem, dupla est ipsius AD. tota enim AI, tripla est ipsius AD. Triangulum ergo DHE erit duplum trianguli ADE. Sunt vero hæc triangula in eadem altitudine

tudine. Ergo & basis HE baseos AE dupla erit : adeoque , tota HA , tripla erit ipsius AE. Eodem modo junctis EL. & DK. demonstratur EK esse tripla ipsius AE, adeoque AK, quadrupla esse ipsius AE. Et sic AC ipsius AE quintupla. Rectæ ergo AF & AG sunt æquemultiplices AE & AD. Tum quoque AH & AI. & rursus AK & AL. & denique AC & AB. æquemultiplices ipsarum AE & AD. Est autem, ut AD ad AG, sic AE ad AF. & ut AD ad AI, sic AE ad AH. vel, ut AD ad AE, sic AG ad AF, & AI ad AH, & AL ad AK, & AB ad AC. Rectæ enim DE, GF, HI, KL, CB, sunt parallelæ, utpote eisdem rectæ perpendiculares. Ut ergo magnitudo ad magnitudinem, sic æquemultiplices ad æquemultiplices. Rursus ut AF ad AE, sic AG ad AD, & ut AH ad AE, sic AI ad AD. Ut ergo, æquemultiplex primæ, ad primam magnitudinem; sic, æquemultiplex secundæ, ad secundam. Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO II.

*Si fuerint quatuor magnitudines, quarum prior ad secundam, eandem habet rationem, quam tertia ad quartam, antecedentia vero quacunque multiplicatione modo ambo eadem multiplicentur : tum quoque consequentia, quacunque multiplicatione, sed ambo eadem, multiplicentur : dico, si multipulum primæ, excedat multipulum secundæ; etiam multipulum tertiæ, excedere multipulum quartæ:*  
 & si



*& si deficiat, deficere: & si æquetur, ævari. Et vice versa, si antecedentibus æquemultiplicatis, & consequentibus etiam æquemultiplicatis; multiplicia antecedentium, simul excedant multiplicia consequentium; simulve ab iis deficiant, aut simul æquentur, in omni multiplicatione: tum primam, ad secundam, eandem habere rationem, quam tertia, ad quartam.*

Sint enim in figura num. XXI. magnitudines *AB. AC. AD. & AE*: & sit, ut, *AB* ad *AC*: sic *AD* ad *AE*. Æquemultiplicentur *AB* & *AD*, nempe quinquuplicentur, faciantque *AF* & *AG*. *AC* autem & *AE*. consequentia etiam æquemultiplicentur, faciantque duplicata *AH* & *AI*; triplicata autem, *AM* & *AL*: dico, si *AF*, multiplex primæ, seu *AB*, superaverit *AH* multiplicem secundæ seu *AC*: etiam *AG* multiplicem tertiæ superare *AI*, multiplicem quartæ. Et si *AF* multiplex primæ, minor fuerit quam *AM* multiplex secundæ: etiam *AG* multiplicem tertiæ, minorem esse *AL* quæ est multiplex *AE*, seu quartæ: & si æquetur, ævari. Quoniam enim demonstratum fuit præcedente propositione, æquemultiplices duarum magnitudinum eandem invicem habere rationem, quam magnitudo prima ad secundam: erit ergo, ut, *AB* ad *AD*, sic *AF* ad *AG*. Sunt enim *AF* & *AG* æquemultiplicia magnitudinum *AB* & *AD*. Et rursum, ut, *AC* ad *AE*, sic *AH* ad *AI*. Sunt enim *AH* & *AI* æquemultiplicia magnitudinum *AC* & *AE*. At vero ex constructione, est, ut, *AB* ad *AC*, sic *AD*

Sf

ad

ad  $AE$ : vel, ut,  $AB$  ad  $AD$ , sic  $AC$  ad  $AE$ . Erit ergo, ut  $AB$  ad  $AD$ , hoc est, ut  $AF$  ad  $AG$ ; sic  $AC$  ad  $AE$ , hoc est, sic  $AH$  ad  $AI$ , vel  $AM$  ad  $AL$ . Si ergo  $AF$  multiplex primæ, seu  $AB$ , superaverit  $AH$  multiplicem secundæ; etiam  $AG$  multiplex tertiæ superabit  $AI$  multiplicem quartæ. Est enim, ut,  $AF$  ad  $AH$ , sic  $AG$  ad  $AI$ . Et, si  $AF$  multiplex primæ, minor fuerit quàm  $AM$  multiplex secundæ: etiam  $AG$  multiplex tertiæ, minor erit quàm  $AL$  multiplex quartæ. Est enim, ut  $AF$  ad  $AM$ , sic  $AG$  ad  $AL$ . Denique, si multiplex  $AC$  æqualis fuerit multiplici  $AB$ , etiam multiplex  $AE$ , æqualis erit multiplici  $AD$ .

Pro altera autem parte propositionis demonstranda, sit  $FA$  &  $GA$  æqvemultiplicia antecedentium  $AB$  &  $AD$ , quæ quidem juxta quamcunque multiplicationem, simul excedant æqvemultiplicia, consequentium  $AC$  &  $AE$ ; simulq; deficient, aut simul æquentur: dico  $AB$  ad  $AC$  eandem habere rationem, quàm  $AD$  ad  $AE$ . Quod in omni hac multiplicatione verum est. Si enim adversarius hoc negaverit, dixeritq;, antecedentia quidem æqvemultiplicata juxta quamcunque multiplicationem, simul excedere æqvemultiplicia consequentium &c. non tamen ideo rationes esse easdem seu æquales: sit ergo una quidem ratio  $AB$  ad  $AC$ , altera autem  $AD$  ad  $AE$ , quarum antecedentia ex adversarii hypotesi æqvemultiplicata juxta quamcunque multiplicationem



nem simul excedant æquemultiplicia consequentium: nec tamen ipsæ rationes sint æquales. Quintupletur AP. sitque AQ. Retentis ergo prioribus, quintuplum quidem AB, unius antecedentis, est AF: quintuplum verò alterius antecedentis, nempe AP; est AQ. Ex prioribus autem, duplum ipsius AC, prioris nempe consequentis est, AH; duplum verò AE posterioris consequentis, est AI. Excedit autem AF æquemultiplex unius antecedentis ipsam AH æquemultiplicem sui consequentis. AQ autem æquemultiplex alterius antecedentis, non excedit AI æquemultiplicem alterius consequentis: ergo non simul excedunt æquemultiplicia antecedentium æquemultiplicia consequentium: quod est contra hypothesin. Supponitur enim æquemultiplicia simul excedere. Quascunque ergo rationes inæquales sumat adversarius, statim demonstratur æquemultiplicia antecedentium, non simul excedere æquemultiplicia consequentium juxta quamcunque multiplicationem: adeoque aliquid concludi, quod est contra hypothesin. Liqvet ergo, propositum verum esse.

## PROPOSITIO III.

*Si quatuor magnitudinum, prima & tertia quacunque multiplicatione æquemultiplicentur, ac secunda & quarta etiam quacunque multiplicatione æquemultiplicentur: æquemultiplex autem primi, excedat æquemultiplicem secundi, sed æquemultiplex tertii non excedat æquemultiplicem*

Sf 2

quar-

quarti: erunt duæ illæ rationes inæquales; & illa quidem major, cujus antecedentis æquemultiplex, consequentis æquemultiplicem excedit: illa autem minor, cujus antecedentis æquemultiplex, consequentis æquemultiplicem non excedit: hoc est, prima magnitudo ad secundam majorem habebit rationem, quam tertia ad quartam. Sint in figura XXI. quatuor magnitudines AB, AC, AP, AE. quarum prima & tertia quintuplicatæ dent AF & AQ. secunda verò & quarta duplicatæ dent AH, AI: dico, quoniam AF, multiplex primæ superat AH multiplicem secundæ, AQ autem multiplex tertiæ, non superat AI multiplicem quartæ; quod ratio AB ad AC major sit quam AP ad AE. Quod enim ratio AB ad AC diversa sit ab ratione AP ad AE, adeoque, binæ hæ rationes inæquales: præcedenti propositione demonstratum est. Cum ergo rationes AB ad AC, & AP ad AE sint inæquales: ergo una necessariò minor erit; altera major. At illam rationem majorem esse, cujus antecedentis multipulum, majus est multiplo consequentis; illam autem minorem, cujus antecedentis multipulum; minus est multiplo consequentis ipsa recta ratio & sana hominis mens dicitur. Quis enim sanus contrarium statuerit? aut quæ veritate, vel in mediū illud adduci, vel sapientibus viris probari potest? Imò verò, re ipsa rationem AB ad AC, majorem esse, quam AP ad AE, inde liquet. Reductis enim ambabus rationibus ad idem consequens AE: erit quidem, ut AB ad AC, sic AD ad AE. Ratio ergo



ergo AD ad AE, æqualis rationi AB ad AC, est major ratione AP ad AE. Est enim antecedens AD majus antecedente AP. ideoque illa ratio major hac, per ea, quæ sunt demonstrata capite. XIV. pag 311.

Quibus demonstratis, ipsa definitio VII. libri V. Elementorum Euclidis verissima deprehenditur: falsumque omne illud quod Meibomius in contrarium movet: tum quoque, ea omnia vera, quæ Propositione VIII. & X. libri V. Elementorum sunt proposita, cum ex hac definitione, demonstratio eorum juxta Euclidem procedat. Imò verò, si hæc definitio omitteretur: harum tamen Propositionum veritas facillima methodo demonstraretur. Est enim VIII. Propositio, hæc. *Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem, quam minor: & eadem ad minorem, majorem habebit rationem, quam ad minorem.* Nempè, tribus quibuscunque magnitudinibus datis, eadem, vel utraque datarum major est, vel minor, vel alterutri æqualis, vel denique una quidem major, altera minor. Ut in figura XXII. Sint duæ datæ AB major, & CB minor, quæ quidem conferantur cum alia, nempe, vel AK, ita ut AK utraque data major sit, vel AF, quæ utraque data, minor sit, vel AI aut AG, quarum illa ipsi AB, hæc, ipsi CD est æqualis, vel denique AH, quæ neutri datarum æqualis est, sed minor quidem quàm AB, major autem quàm CD. In omnibus ergo casibus, ratio majoris ad eandem major est, quam minoris ad eandem: cum retento eodem

Sf 3

con-

consequente, antecedens illius rationis sit majus. Data enim rationes, quæ invicem comparantur, sunt, AB ad EK, & CD ad EK: AB ad EI, & CD ad EI: AB ad EH, & CD ad EH: AB ad EG, & CD ad EG; denique AB ad EF, & CD ad EF. At in omnibus hisce rationibus semper priorum rationum antecedentia sunt majora antecedentibus posteriorum: cum illic antecedens sit major magnitudo, heic minor; consequens autem idem. Rationes ergo majoris magnitudinis ad eandem majores sunt, quam rationes minoris magnitudinis ad eandem: quoniam illic antecedens majus est; hic minus: juxta demonstrata capitis XIV. pag. 311.

At verò ex iisdem principiis constat, rationem ejusdem ad minorem magnitudinem majorem esse ratione ejusdem ad majorem magnitudinem: hoc est, in fig. XXII. rationem EK ad CD majorem esse, quam EK ad AB, & sic EI ad CD majorem rationem habere, quam EI ad AB: eodemque modo EH, vel EG, vel EF majorem habere rationem ad CD quam ad AB. Si enim eodem antecedente retento, consequens augeatur: ipsa ratio imminuitur: juxta ea quæ demonstrata sunt capite XIV. pag. 310. Unde cum in omnibus hisce rationibus idem sit antecedens, unum autem consequens majus, alterum minus: erit etiam illa ratio major, cujus consequens minus; illa vero minor, cujus consequens majus: adeoque, ratio ejusdem ad minorem magnitudinem, major, quam ejusdem ad majorem.



maorem magnitudinem. Unde tota Propositio VIII. certissime ac brevissime demonstratur.

Sed & decima propositio hujus libri ex hoc eodem principio demonstratur. Verba Euclidis sunt. *Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκείνο μείζον ἐστὶ, πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλαττον ἐστίν.* Quæ ad idem rationem habent; eorum majus quidem illud est quod majorem habet rationem: ad quod autem idem majorem habet rationem, illud minus est. Nempe, cum duæ magnitudines antecedentes idem habeant consequens; unum autem antecedens, majorem ad idem habeat rationem, quam alterum: sequitur, hoc antecedens majus esse. Etenim demonstratum antea est; majorem illa rationem habere, quorum antecedentia cum eodem consequente comparata sunt majora: minorem vero, quorum antecedentia minora. Vide capite XII. & XIV. Hæc ergo tam certa sunt, ac solem meridie lucere, aut nos homines esse. Unde falsum ac vanum omne illud quod à Meibomio in contrarium adfertur. Videndum tamen, quibus argumentis hæc oppugnet Meibomius, & an illa sapiente viro, aut veritatis amante digna?

## CAP. XVI.

Ipsam ergo Meibomium nunc differentem audiamus libro suo de Proportionibus pag. 126. *Falsa igitur est octava Propositio libri quinti Elementorum Euclidis*  
*& de-*

& decima, quas pag. 32. & 36. retuli; & multæ aliæ, quæ ab his pendent. Falsa ergo est, uti postea amplius ostendam libri quinti definitio septima, quam pagina 30. & 4. retuli, quâ tanquam basi octava illa Propositio nititur. Multæ autem Propositiones veterum quamvis falsæ non sint, malè tamen ex his elementaribus demonstratæ probantur. Male enim Euclides hac octava quinti usus demonstravit ejusdem libri Propositiones XIV. XX. XXI. Male quoque divinus Archimedes ex eadem demonstravit secundam propositionem libri primi de Sphæra & Cylindro, quam pagina 37. adduxi, ad quem Eutocius commentando multas erroneas Propositiones, ex octava quinti deductas, protulit; quas ante ipsum Pappus produxerat Mathematicorum Collectaneorum lib. VII. ex quo desumptas, libri quinti Elementorum fini, Juniores illa adtexuerunt. Ex illa quoque octava quinti, propullulavit insignis illa paralogismorum series, in secunda demonstratione VIII. Propositionis libr. II. de Sphæra & Cylindro quæ à pagina 48. versu 23. his verbis incipit,  $\delta\epsilon\iota\chi\tau\acute{o}\nu\ \delta\epsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \tau\acute{o}\ \alpha\pi\acute{o}\ \Gamma\Theta.$  Monstrandum igitur quadratum à CH in HF minus esse rectangulo à BHC in HG. quod idem est ac monstrare quadratum à CH ad rectangulum, à BHC minorem rationem habere, quam rectam GH ad HF. Nempe 16. ad 24. minorem habere rationem quam habeat  $10\frac{1}{2}$  ad  $15\frac{1}{2}$ , vel 21 ad 31. cum contra statuendum sit 16. ad 24. majorem habere rationem, quam habeat 21. ad 31. Quoniam enim est, ut 16. ad 24, ita 21. ad  $31\frac{1}{2}$ , maior est distantia inter 21. &



21. & 31<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, hoc est 16. & 24, quàm inter 21. & 31.  
 Nulla autem ex omni antiquitate Mathematica illustri-  
 or Propositio proferri potest, quàm hæc sit octava Ar-  
 chimedis; in qua toties dicatur, quæ ratio major sit,  
 quæ minor; quæ alterius dupla, quæ sesquialtera, in quo  
 cum Theone juniores omnes & in primis Gregorius à Sæct.  
 Vincentio tam amplè errarunt. Ideoque Eutocii com-  
 mentarium, quo fusissimè hæc Propositio & Euclidea  
 doctrina, id est, libri quinti Propositiones VIII. & X.  
 enarrantur, totum proferendum putavi: ut, quid veteres,  
 hic docuerint, clare omnibus constaret. Ita autem hæc  
 coherent, ut omnes Juniorum errores, nisi perspectis  
 veterum erroribus solide dijudicari nequeant. Quare,  
 inquit Euthymius, cum is præcipuus hujus narratio-  
 nis mihi scopus sit, ut, totam antiquitatem, ignoratæ in  
 quibusdam Elementis Geometriæ convincam; deinde  
 autem, Juniorum pravas explicationes & monstrosas hal-  
 lucinationes demonstrem; antiquis hunc honorem habe-  
 bo, ut primi, demonstrationum viribus adacti, veritati,  
 omnium rerum antiquissimæ, victoriam concedere co-  
 gantur. Agite ergo, ò præclari Mathematici, & omnes  
 ingenii nervos contendite, ut & acutè omniâ quæ porro  
 relaturus sum inspiciatis, & alacriter vestra rationibus  
 adductis defendatis. Falsam dixi quinti libri Proposi-  
 tionem octauam. Quod si illa quæ in principiis, paulo  
 ante exposui, bene vobis perpensa essent, falsitatis quoque  
 causas perspectas haberetis. Duobus autem modis illius  
 falsitatem ostendam. Primo falsa Euclidis principia de-

T t

mon-

*monstrando : Altero , vera Euthymii principia confrmando. Ita autem & contra Euclidem porro argumentatur & sua probare conatur. Tres autem hujus Propositionis casus esse possunt. Velenim tertia D: (nempe adhibeatur diagramma Euclideum ad hanc Propositionem à Commandino allatum ) utrauis reliquarum<sup>A</sup><sub>B</sub>, C minor est; vel major: vel majore<sup>A</sup><sub>B</sub>, minor; minore autem C, major. Primo casu, primum hujus Propositionis membrum, quod pagina 32. relatum est his verbis; Inæqualium magnitudinum major ad eandem majorem rationem habet, quam minor Euthymius verum pronunciat: falsum autem membrum secundum, reuertendo aduersam priori sententiam proferens, quod ibidem his verbis conceptum attulimus; & eadem ad minorem, majorem rationem habet, quam ad majorem. Atque hujus primi casus illud exemplum ponemus, quod Græci codices editus & manuscripti adferunt: quod & Commandinus retinuit, Græci Codicis religiosus interpretes; quem sine causa hic deseruit Clavius, dum tertiam D, secunda C posuit majorem, propositionum XIV. XX. XXI. ejusdem libri demonstrationes, ut puto, secutus. Verum igitur est primum membrum, <sup>A</sup><sub>B</sub> ad D, seu 7 ad 4. majorem rationem habere, quam C ad D, seu 5 ad 4: at falsum membrum secundum, nempe D ad C, seu 4 ad 5, majorem rationem habere, quam D ad <sup>A</sup><sub>B</sub>, seu 4 ad 7. Secundo casu, primum membrum falsum est; verum autem secundum. Falsum enim est 4 ad 6, majorem ratio-*



rationem habere, quam 3 ad 6. sed verum 6 ad 3, majorem habere rationem, quam 6 ad 4. Tertio casu falsum est utrumque membrum, quippe & hoc falsum est 4 ad 3, majorem habere rationem, quam 2 ad 3; & istud 3 ad 2, majorem habere rationem, quam 3 ad 4. quod diversi generis rationes inter se comparari nequeant. Quare ex tribus hujus Propositionis casibus, unus verus est, reliqui duo falsi, ut statim demonstrabimus. Hæc ipsius Marci Meibomii verba sunt, in quibus præter stolidam quandam vanitatem atque arrogantiam, insignis quoque se monstrat falsum dicendi libido. Equidem capite XI. hujus libri accuratè & plenè demonstravimus, quàm turpiter Meibomius Lectori imponat, dum Theoni aliisque juniorum errorem affingit, quem non committere: quam falsò hunc ipsum Theonem & Eutocium accuset, cum & is, & cæteri post ipsum Mathematici, optime ea omnia sciverint, quæ Meibomius pro suis oraculis venditat pagina 68. Unde hæc tam cruda rursus Lectori apponere opus non erat. Equidem, in iis quæ antea attigimus, ita se gessit Meibomius, ut fraus non ab omnibus tam facile animadverteretur. Quotusquisque enim est, qui Theonem veteresve legit. In his autem, quæ contra Euclidem movet, ipsa veritatis principia singulis, omnibusque hominibus innata, convellit; ut multo quidè helleboro ipsi opus sit, ad tam crassos humores cerebro pellendos, quibus occupata mens, id vel ignorat, vel respuit, quod nemo sanus verum esse non

T t 2

per-

pervidet : nemo, nisi mente motus, pro falso unquam habuerit. Falsam dicit octavam & decimam Propositionem V. Elementorum Euclidis : falsam VII. definitionem ejusdem libri : quas omnes veras esse, & nunc dicimus, & antea clarissimè demonstravimus. Unde nugæ sunt, quæ de erroribus & falsis explanationibus Veterum pariter ac recentiorum hac in parte somniat Meibomius. Quæ enim hisce fundamentis nituntur, atque hinc solide demonstrantur, certissima sunt ; cum ipsa fundamenta sint optima ac certissima. Illi verò, qui existimant nos Meibomio nihil contrarium dicere, advertant huc animum. Is enim falsam octavam & decimam Propositiones libri quinti Elementorum dicit : ego utramque veram esse demonstro. Is rationem 16 ad 24, majorem esse ait ratione 21 ad 31. ego minorem dico. Is falsum esse ait, *rationem 4 ad 6, minorem esse quam 3 ad 6*. ego id ipsum verum esse affirmo. Quid magis contrarium, quam verum & falsum ? affirmatio & negatio ? majus & minus ?

Sed conferamus invicem Euclidis, hoc est, nostram assertionem, cum hac Meibomii : & primò quidem, in tertio Meibomii casu, ubi AB, seu unam datarum magnitudinum, tertia seu D majorem ponit, C autem seu secundam, eadem tertiâ minorem. Sirque in figura num. XXII. hujus libri, AB Meibomii, seu prima inæqualium, etiam nostra AB. C. autem Meibomii seu secunda inæqualium, sit nostra CD, deniq;  
 tertia



tertia seu eadem quæ est Meibomii & Euclidis D, sit nostra EH. Dicit autem Euclides rationem AB ad EH, maiorem esse, quam CD ad EH. Tum quoque, EH ad CD, maiorem habere rationem, quam ad AB. Utrumque falsum esse ait Meibomius: nos autem verissimum esse antea certissime demonstravimus. Per ea enim, quæ capite XIV. & XII. fuere proposita, manifestum fecimus: reductis binis rationibus, ad idem consequens, tum illam maiorem esse, cuius antecedens majus; illam vero minorem, cuius antecedens minus. Retento autem eodem antecedente, illam rationem maiorem, cuius consequens minus; illam vero minorem, cuius consequens majus. Ratio ergo AB ad EH, major erit, quam CD ad EH: cum antecedens AB, majus sit, antecedente CD. & rursus, ratio EH ad CD, major erit, quam ad AB; cum illud consequens minus sit; hoc majus. Videndum verò, quid contra manifestam hanc veritatem adferat Meibomius? Dicit *utrumque membrum hoc casu falsum esse, quod diversi generis rationes excessiva & defectiva inter se comparari nequeant.* At vero unde probat Meibomius hæc rationes comparari invicem non posse? Creditne nos adeo fungos esse, ut fidem habeamus contra claras ac manifestas demonstrationes sine probatione quicquam. proponenti? At si in Geometricis disputare velit, saltem principia ipsius cognita habeat. Demonstravimus autem in prioribus, nihil in Geometria supponi debere: nisi quod

Tt 3

com-

communi omnium hominum notione verum deprehenditur. Sicut illa Geometrarum Axiomata verè talia sunt. *Quæ eidem æqualia etiam inter se sunt æqualia. Et totum majus sua parte.* At vero talene hoc est principium Meibomii. *Rationes excessivæ & defectivæ comparari invicem nequeunt.* Quis unquam mortalium hoc concesserit, præter Meibomium? Contrarium docent omnes Geometræ, omnes Mathematici. Imo reipsâ comparant invicem rationes excessus & defectus. At si impossibile esset rationes excessus & defectus invicem comparare: neque id fecissent Geometræ. Quod enim impossibile est, aut fieri nequit, id nemo mortaliû facere potest. Sane, id quivis ratione præditus perspicit: quod ea quæ fieri nequeunt, ab nemine fiât. At revera comparâtur invicem rationes excessus & defectus. Ergo comparatio taliû rationum fieri potest, neque est impossibilis. Sed video facilè, quid Meibomium in hunc errorem præcipitaverit. Fando forte audiuerat, esse quædam apud Geometras, quæ comparari invicem nequeunt. Crediderim quoque ex verbis hisce Euclidis in Definitionibus rationum, λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν κλ. *Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis &c.* erroris sui fundamentum traxisse. Verum quidem est, nullam rationem posse sumi inter aliquid & nihil. Τῆ γὰρ οὐκ ἔστι πρὸς τὸ ἄδεν ἄδεις λόγος ὅστι. Ratio enim rei alicujus seu (entis) ad nihil nulla est. Unde hac quidem in  
parte



parte verum ait Meibomius pag. 146. (quamvis nihil novi adferat) diuitum bona, cum pauperum bonis, quæ nulla sunt, conferri non posse. Sed unde probat Meibomius, rationes excessivas (ut ille loquitur) aliquid esse, defectivas vero nihil? Sanè, rationem æqualitatis vocat rationem nihili. An vero rationes defectivæ etiam sint rationes nihili? id autem ignoro. Quod si has quoque tales fecerit, jam non video quid inter rationes æqualitatis & defectivæ discriminis fiet. Equidem inter jocosæ narratum mihi aliquando fuit, vaccam sine cerebro vixisse per spatium aliquod fatis longum, craniumque apertum nihil cerebri monstrasse, sed vias quidem ductusque omnes, tum quoque pulpam ipsam in lapidem mutatam. Quod ego Meibomio evenisse nollem. Tum enim facile fieri posset, ut cui nihil in capite cerebri esset, illi quoque ipsa ratio adeo defectiva foret, ut planè instar nihili fieret. Sed meliora speramus optamusque. Tantum id ajo, male argumentari Meibomium, pag. 146. qui principium suum, nempe *rationes excessivæ & defectivæ non posse invicem comparari* hinc probat; quod bona diuitis & egentis, seu qui nil possidet, nequeant conferri. Verum enim est, si quidem Titius nihil plane possideat; tum bona Lucii, cum illius bonis, comparari non posse: cum nulla institui possit collatio, inter aliquid & nihil. Hoc autem contra comparisonem rationum excessivæ & defectivæ nil concludit: cum, rationes defectivæ verè sint aliquid: ideoque, collatio ista sit rei  
ali-

alicujus ad aliam. Ut autem curioso Lectori, gratam, hac in parte, operam præstemus: paulo accuratius de iis disputabimus, quæ comparari in Geometricis invicem nequeunt. Inter ea ergo, ratio in Geometricis sumi non potest: quæ, communem aliquam mensuram non habent. Cum enim ratio proprie atq; accurate loquendo, sit mutua duarum magnitudinum relatio secundum quantitatem: hoc est, ratio sit illa habitudo, quam una magnitudo habet ad aliam; nempe, quod vel æqualis alteri sit, vel dupla, vel tripla, vel centupla, & sic porrò in infinitum: hæc autem relatio seu habitudo, non cognoscatur sine communi mensura: ergo, ubi nulla communis mensura, ibi neque ratio. Ubi enim nulla fuerit communis mensura: ibi neque dici potest, an unum alterius duplum sit, an triplum, an dimidium; unde nec ipsa ratio haberi sciri potest. Equidem, in magnitudinibus ineffabilibus dicere nequeo, unam alterius duplam triplamve esse: certam tamen harum linearum mensuram habeo, ita ut in quibuscunque datis lineis eandem mensuram exprimere possim. Inter lineam vero & quadratum quodcunque, in Geometricis nulla ratio datur: quia nulla horum perfecta communis mensura. Longitudo quidem totam lineam mensurat, sed quadratum cubumve non nisi secundum unam mensuram. Coeteræ autem mensuræ in latum nempe & profundum, in linea non sunt. Ideoque, cum mensurari eo modo linea nequeat; utique nec dici potest, quota  
pars



pars, aut quotupla quadrati cubive sit. Hanc ob causam, neque ratio inter finitum & infinitum datur: (Infinitum enim illud vocatur, cujus nulla est mensura) sicut neq; inter magnitudines, pondera aut numeros. Neque enim magnitudinis alicujus & numeri, communis mensura datur. In magnitudine enim quacunque, quicumque numerus sumitur: cum omnis magnitudo in infinitum dividatur: adeoque, & unum, & mille, & centum mille numeri illic concipiuntur. Eodem modo in eodem pondere diversi numeri diversaeque magnitudines considerantur. Si enim cubus ferreus cum cubo plumbeo comparetur: si magnitudo eadem fuerit, pondus diversum erit: & si pondus utrinque idem, magnitudo erit diversa. Cum ergo nullam communem mensuram habeant magnitudines, pondera & numeri; neque comparari invicem possunt secundum magnitudinem: adeoque nec inter illas ratio dari. Euclides, aliis quidem verbis explicuit naturam eorum quae comparari invicem possunt. Definitione IV. libri quinti. Λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. *Rationem invicem magnitudines habere dicuntur, quae multiplicatae se invicem possunt excedere.* Unde, rationem invicem non habebunt, quae multiplicatae, se invicem excedere nequeunt. Atque ita quidem, infinitum ad finitum, nullam habebit rationem: quandoquidem, quodcunque finitum, quomo-

V u docunq;

docunque multiplicetur, semper finitam habeat magnitudinem, ideoque infinitum excedere nequeat. Nescio tamen, an hæc definitio satis sit accurata? Inter lineam enim & cubum ratio non datur. Et tamen haud pro certo dixerim, saltem, non tam clarum & manifestum id esse arbitror, ut supponi debeat: lineam, quocunque modo multiplicetur, quadratum tamen, cubumve excedere non posse. Certum quidem est excessum lineæ ultra quadratum aut cubum non dari. Verum id ideo contingit, quod nulla sit mensura, qua excessus iste mensuretur. Omnia ergo, quæ communem mensuram nullam habent, sunt plane irrationalia, hoc est, nullam ad invicem rationem habent. Scio aliter vocem *irrationalis* Geometris quibusdam usurpari, nempe, pro eo, quod nos ineffabilem rationem dicimus: sed hæc propria atque accurata vocis significatio est. Quæ ergo communi mensura carent, ea neque comparantur invicem secundum quantitatem. Cætera autem possunt. Sic linea curva & recta comparantur invicem. Linea enim parabolica, hoc est, curva, æqvatur alteri rectæ. Sic linea cum lineis, pondera cum ponderibus, numeri cum numeris comparantur. Id autem, quod de mensura hucusque diximus, accuratius adhuc nobis erit explicandum. Omne ergo, quod secundum quantitatem cum alio comparatur, talem omnino ad aliud *ἴσων* habet; ut vel alteri sit æqvale, vel majus, vel minus. Omnis enim *ἴσως*, secundum quantitatem,



tem, in hisce tribus consistit; nempe, ut antecedens terminus consequenti, vel æqualis sit, vel major, vel minor. Atqvi hoc sciri neqvit, nisi per communem mensuram, quæ quidam indicat, an ambo termini, æquales sint, an unus major, alter minor. Quæ ergo hac communi mensura carent, in illis neque sciri potest, an æqualia invicem sint? an majora, minorave? adeoque, nec sciri, quam *ῥέσις* invicem habeant: unde nec ratio inter talia datur. Si autem communem mensuram habuerint, facîle cognoscitur quis datorum terminorum major sit, quis minor? nisi ambo fuerint æquales. At si cognitum est terminos, vel æquales esse, vel majorem unum, alterum minorem, idque certo modo, ut unus alterius, vel duplus sit, vel triplus, vel subduplus, vel denique, ut linea ad lineam; quæ omnia mensura cognoscuntur: jam quoque ratio ipsa datur. cum ratio nihil aliud sit, quam hæc ipsa *ῥέσις* quam unum quantum habet ad aliud juxta datam quantitatem. At vero omnes rationes communem habent mensuram, nempe antecedentium terminorum. Id enim quod quantitatem exprimit ac definit, mensurat rem. Sed antecedens exprimit & definit quantitatem rationum. Si enim antecedens duplum fuerit consequentis, ratio est dupla; si, antecedens triplum, ratio tripla: si antecedens subduplum, ratio subdupla: atque sic in infinitum. Cum ergo in omnibus rationibus, tam excessus quam defectus antecedens exprimat ac definiat quantitatem rationum,

V u 2

ergo

ergo communis rationum mensura datur, adeoque invicem possunt comparari.

## CAP. XVII.

Sed aliud fortè argumentum opponet Meibomius: nempe, cum ipse Euclides fateatur, eas solas magnitudines mutuam rationem habere, atque invicem comparari posse, quæ, multiplicatæ se invicem excedunt, ergo & illæ solum rationes comparari invicem debent, quæ multiplicatæ se invicem possunt excedere. At vero rationes defectûs, si in infinitum in se multiplicentur, nunquam tamen excedent rationem quamcunque excessûs datam. Si enim rationem quamcunque defectûs duplicaverim, triplicaverim, deniq; millies, aut centies millies in se multiplicaverim: semper ratio facta, erit ratio defectûs, adeoque, minor quacunque data ratione excessûs. Cum enim demonstratum antea sit, capite XII. & XIII. rationes excessûs multiplicari, quando media proportionalis multiplicationi respondens, inter extrema seu terminos investigatur: ratioque antecedentis ad mediam, est facta ex multiplicatione: quæ quidem priore major est, & tamen semper ratio defectûs: ideo ratio defectûs non potest excedere rationem datam excessûs.

Verùm si hoc omnino ita se haberet, certumque adeo foret, non posse rationes defectûs excedere rationes excessûs, neque ullo modo invicem comparari: non ideo quicquam, vel contra Euclidem, vel  
contra



contra Veteres Geometras proficeret Meibomius. Et-  
 enim, vel verum est id quod proponitur: rationes de-  
 fectûs cum rationibus excessûs comparari non posse;  
 quod illæ multiplicatæ, has excedere nequeât: vel falsû  
 est. Si falsum est; omnis controversia est finita, solusq;  
 Meibomius erroris convincitur. Si verum est: utiq;  
 id non ignoravit Euclides, qui ea tantum comparari in-  
 vicem posse tradidit, quæ se invicem multiplicata ex-  
 cedunt. Sanè, nec in VII. definitione, neque in VIII.  
 vel X. Propositione V. libri quicquam tradidit, ex  
 quo demonstretur Euclidem, rationes excessûs & de-  
 fectûs invicem comparasse. Posito enim, ex mente  
 Meibomii, rationes excessûs & defectûs invicem com-  
 parari non posse, quoniam istæ multiplicatæ has non  
 excedant; cum ultimum hoc, sit principium Eucli-  
 deum: dicendum omninò, si prius verum est, neque  
 illud ignoratum fuisse Euclidi: cum nihil disertis  
 verbis contra hoc dogma scripserit. Ubi enim De-  
 finitione VII. rationes inæquales, nempe majores &  
 minores definit, ita loquitur, ut verba quidem ipsius  
 facile explicari possint, de rationibus ejusdem speci-  
 ei: si quidem supponatur, rationes excessûs cum ra-  
 tionibus defectûs non comparari. In demonstratione  
 quoq; Propositionis VIII. verba illa ἄλλο δὲ ὅτι οὐχὶ τὸ δ.  
*alia vero magnitudo quæcunque*  $\Delta$ . ita explicari possunt;  
 ut eadem magnitudo; nempe  $\Delta$ , vel major sit, utraque  
 data, vel minor. Si enim Euclides existimasset ra-  
 tiones excessûs cum rationibus defectus omnino non

comparari; neque necessarium fuisset de eo heic monere, quod eadem seu D. media inter utramque datam sumi non posset; quandoquidem, id ex alio principio cognitum esset; eo nempe, rationes excessus & defectus non posse invicem comparari; quod se invicem excedere nequeant. Atque ita quidem constat, si verum omnino foret id quod Meibomius supponit: nempe, non posse rationes excessus & defectus invicem comparari, non tamen ideo ullum Euclidis principium à Meibomio eversum esse: cum is nusquam rationes excessus & defectus invicem disertis verbis compareret.

Sed nec argumentum hoc Meibomii ullo modo verum est. Definitio enim Euclidea quæ de iis agit, quæ rationem invicem habent, tantum de magnitudinibus loquitur: & si ipsis quoque rationibus necessario applicari deberet, nihil tamen contra hoc certum principium concluderet: quandoquidem, rationes si invicem addantur, tandem, quæcunque aliam rationem excedant: & ratio quæcunque defectus possit per aliam quandam rationem, nempe excessus, ita multiplicari; ut datam rationem excessus omnino excedat. Atque in additione res clara est. Detur enim quæcunque ratio defectus, nempe 1 ad 2, alia autem excessus 3 ad 2. Si prior ratio quater addatur invicem, erit ratio facta 4 ad 2, adeoque major, quam 3 ad 2. Cujus rei demonstratio ex capite X. pag. 231. & seq. petatur. Verum, in multiplicatione, etiam  
idipsum



idipsum liquet. Datis enim binis hisce rationibus, 1 ad 2, & 3 ad 2. si priorem multiplicaverim per rationem 7 ad 2: prodit ratio facta 7 ad 4, quæ major est ratione 3 ad 2, seu 6 ad 4.

Id verò, quod principio dixi, non posse rationes defectus in se multiplicatas ullam rationem excessus superare: nihil impedit, quo minus rationes ideo invicem comparari queant. Etenim antea demonstravimus, ea tantum invicem comparari secundum magnitudinem non posse, quæ communi mensura carent. Rationum autem mensura ex antecedentiū terminorum quantitate dependet: quæ facillime cognoscitur, ubi ambæ rationes ad idem consequens fuerint reductæ. Tum enim facile perspicitur, quotuplus, aut quota pars consequentis antecedens terminus sit, adeoque communis mensura rationum datur. Sint enim in figura XIX. rationes  $\sigma\mu$  ad  $\zeta\nu$ , &  $\alpha\gamma$  ad  $\phi\epsilon$  invicem comparandæ: reducantur ambæ ad idem consequens  $\phi\epsilon$ , fitque, ut  $\sigma\mu$  ad  $\zeta\nu$ , sic  $\zeta\nu$  ad  $\phi\epsilon$ . Cum ergo ratio  $\zeta\nu$  ad  $\phi\epsilon$ , hoc est,  $\sigma\mu$  ad  $\zeta\nu$ , comparatur cum ratione  $\alpha\gamma$  ad  $\phi\epsilon$ : facile perspicitur, antecedens  $\alpha\gamma$  partem esse consequentis  $\phi\epsilon$ : antecedens vero  $\zeta\nu$ , totum aliquod esse, cujus pars sit  $\phi\epsilon$ : adeoque, illic esse rationem partis ad totum: heic autem, totius ad partem. Unde, communis mensura harum rationum datur. Ipsæ enim rationes, nullam, propriè loquendo, quantitatem habent. Sunt enim  $\chi\epsilon\sigma\epsilon\iota\varsigma$  seu relationes quantitatum, quoad quantitatem, Quantitas autem ipsarum

farum ex quantitate antecedentium terminorum simpliciter dependet. Si enim antecedens terminus, consequentis duplus fuerit: ratio est dupla; si triplus, tripla: & sic in infinitum. Nihil ergo obstat, quò minus, rationes excessûs & defectûs invicem conferantur. Quod enim definitionem illam Euclidis attinget, *ea nempe comparari invicem debere; quæ ejusdem sunt generis*, nullo modo nobis adversatur. Rationes enim excessûs & defectûs, non genere differunt, sed specie. Genus autem commune habent, nempe rationes. Eodem enim modo, quo animal genus hominis & bruti, dividitur in rationale & irrationale; quæ quidem divisio, diversas ejusdem generis species dat: ita etiam, ratio dividitur in excessûs, æqualitatis & defectûs, ut diversas species ejusdem generis. Atque hæc veritates tam claræ sunt: ut ipse quidem Meibomius, quamvis contrarium verbis doceat, re tamen & opere eas ipsas probet. Passim enim in libro suo, ac figillatim pag. 106. & 104. ait rationem duplam æqualem esse subduplæ, seu dimidiæ; & sesquialteram, subsesquialteræ: quod, quamvis ineptum plane ac falsum sit; id tamen, quod proponimus, clare indicat; ipsum nempe Meibomium, rationes excessûs & defectûs invicem comparare secundum quantitatem. Quicquid enim æquale alteri dicitur, id cum illo necessario comparatur secundum quantitatem. Æqualia enim sunt, quorum quantitas est æqualis. Ad si Meibomius rationem duplam seu excessûs, æqualem esse



esse ait subduplæ, seu defectûs ; & sesquialteram etiam excessûs , subsesquialteræ, seu rationi defectûs: ergo rationes excessûs & defectûs secundum quantitatem invicem comparat. Adeoq; possunt invicem comparari. Unde nullus hic lapsus, aut error, vel Euclidis, vel aliorum Geometrarum : sed solius Meibomii, qvæ ea fieri posse negat, quæ omnes Geometræ faciunt, imò qvæ ipsemet facit Meibomius; qvamvis hic falsam, illi veram & rectæ rationi conformem comparisonem tradant : de quo plura sequenti capite. Hoc enim clare demonstravimus, rationes excessûs cum rationibus defectûs verè conferri posse, ideoque male agere Meibomium, qui Euclidem Geometrasque hanc ob rem erroris insinuat.

## CAP. XVIII.

Duos vero reliquos casus Meibomii qvod attinet, primum nempe & secundum, in iis qvidem hoc unicum observandum est, qvod Euclides in comparatione rationum defectûs, eas minores ponat, qvarum antecedentia sunt minora: eas vero majores, qvarum antecedentia, reductis rationibus ad idem consequens, majora fuerint. Quod etiam verum esse, antea capite XII. & XIV. hujus libri, accurate demonstravimus. Neque aliter communis omnium hominum intellectus, ipsumque veritatis lumen in natura residuum dijudicare potest. Si enim res mihi cum hoste quodam esset, qvæ exercitum sexaginta millium armatorum

X x

torum

torum contra me duceret: ego autem geminū haberem exercitum, unum XL millium armatorum, alterum XX. certum est, si duos exercitus jungerem: tum, quoad numerum bellatorum, rationem utrinque esse æqualitatis. Iuncti enim ambo mei exercitus darent LX. M armatorum, qui numerus alterius numero æqualis est. Si vero propter alias causas, ambo exercitus colligere, locove movere nequirem: mihi vero necessarium foret, uno exercitu hosti obviam ire, maximeque rebus meis conducere judicarem, si illum mecum exercitum ducerem, qui majorem ad hostis exercitum rationem haberet: crediderim, nullum inter omnes duces, omnēve milites futurum, qui non eum exercitum, majorem ad hostem rationem habere diceret, in quo quadraginta millia armatorum sunt, quam eum, in quo viginti millia: adeoque, re & opere testarentur, rationem quadraginta ad sexaginta, majorem esse, quam viginti ad sexaginta.

Eodem modo, si Princeps decretum aliquod in quibusdā urbibus quā citissime propositum vellet, eamque ob rem, quinque vel sex tabellarios emitteret, qui mandata ad quatuor vel quinque urbes præcipuas eodem intervallo à metropoli vel regia sede remotas deferrent; unāque in pagis, vicisque; per quas singulorum iter instituendum erat, eadem indicarent. Ad excitandum vero studium ac diligentiam cursorum, præmia singulis proponeret, pro ratione itineris quovis die facti: dico majora præmia eum habiturum, qui  
majo-



maiora spatia confecerit ; adeoque rationem itineris  
 ipsius maiorem esse. Sit enim in fig. XXIII. huius  
 libri A sedes regia. B. C. D. E. F. urbes primariæ reg-  
 ni, eodem intervallo ab A distitæ . decurrant autem  
 plures tabellarii, unus quidem versus B , alter versus  
 C, tertius versus D, quartus versus E, & quintus ver-  
 sus F. Primo autem die, perveniat cursor AB in G :  
 cursor vero AC, in H: cursor AD, in I : & cursor  
 AE, in K : & denique cursor AF, in L. dico, eum  
 qui est in G, majus præmium accepturum, quam eum,  
 qui est in H, aut in I, aut in K, minus vero quam eum,  
 qui est in L. eo quod plus itineris confecerit, quam  
 vel H, vel I, vel K, minus vero quam L. Accipiunt  
 autem præmia juxta rationem itinerum suorum ad to-  
 tum. Est autem ratio itineris ejus, qui est in G, ut  
 AG ad AB, ratio autem itineris in H, ut AH ad AC,  
 & ratio itineris in I, ut AI ad AD. & sic itineris in K,  
 ut AK ad AE. denique ratio itineris in L, ut AL ad  
 AF. Quoniam ergo majus præmium accipiat is, qui  
 est in G, quam is qui est in H, aut I, aut K : minus  
 verò quam is, qui est in L : singuli autem, pro ratione  
 itineris sui, quovis die peracti, præmia accipiunt ; er-  
 go, ratio AG ad AB, major erit quam AH, ad AC, vel  
 AI ad AD, vel AK ad AE. Eadem vero ratio AG  
 ad AB, minor erit quam AL ad AF. Sunt vero AB  
 AC, AD & AF æqualia. Reductis ergo omnibus  
 rationibus ad eadem, seu æqualia consequentia : ratio  
 illa major esse deprehenditur, cujus antecedens ma-

X x 2

jus

jus est : illa autem minor , cujus antecedens minus : quod quidem antea ex claris certisque Geometricis principiis cap. XII. & XIII. fuit demonstratum, unde Lector plura petat. Quid autem contra hæc Meibomius? Principium quidem tale supponit , quod non manifestè verum est , sicut illa quæ in Geometricis supponuntur, & ex quibus sua demonstravit Euclides, aliquæ post illum Mathematici : sed quod manifestè falsum & ineptum est. Ponit enim pro principio, rationem duplam æqualem esse subduplæ seu dimidiæ, & sesquialteram subsesquialteræ. Verba ejus pag. 104. *Itaque ratio  $\frac{1}{2}$ , æqualis est rationi  $\frac{2}{1}$  subduplæ duplæ.* At si æquales sunt hæ rationes, dupla nempe & dimidia; dabunt proportionem Geometricam : eritque adeo, secundum Meibomium , ut 4 ad 8, sic 8 ad 4, vel 16 ad 8. Hoc enim ex ipso Meibomio liquet. Hæc enim verba ipsius sunt pag. 185. *Itaque omnium optimè proportionem Aristoteles finivit rationum æqualitatem. Verba illius ex V. Ethicorum Nicomachiorum adponam.* Ἡ ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγος καὶ ἐν τέλει ἁρμονικῶς ἐλαχίστοις. *Proportio est rationum æqualitas &c.* Dico autem, si hæc definitio analogiæ seu proportionis omnium optima est , ut ipsemet Meibomius ait : ergo convertitur. Omnis enim bona definitio debet converti simpliciter : ut omnis homo est animal rationale : & omne animal rationale est homo. Dicendum ergo est, omnis proportio Geometrica ( de hac enim



enim verba facit & Aristoteles & Meibomius) est rationum æqualitas : & omnis rationum æqualitas est proportio Geometrica : quod & verum omninò est. At si ratio dupla & dimidia invicem æquantur: ergo illic est æqualitas rationum secundum Meibomium, adeoque proportio Geometrica. Hæ ergo rationes sunt æquales Meibomio. 2 ad 4, & 8 ad 4. tum quoq; 2 ad 4, & 16 ad 8. Ratio enim 16 ad 8, dupla, æquatur rationi 4 ad 8 subduplæ secundum Meibomium. Est autem ratio 2 ad 4, æqualis rationi 4 ad 8; cum hæc vere sint proportionalia : quod ne Meibomius, quidem negaverit. Quæ vero eidem æqualia, etiam inter se sunt æqualia. Ratio ergo 2 ad 4, est æqualis rationi 16 ad 8. Unde hæc secundum Meibomium erunt proportionalia, ut 2 ad 4, sic 16 ad 8. Proportio enim secundum Meibomium est æqualitas rationum; adeoq; ubi æqualitas rationum, illic proportio. At si Meibomio fides, æquales sunt rationes 2. ad 4. & 16. ad 8. ergo etiam proportionales erunt. Idipsum, in quadruplis & subquadruplis rationibus verum erit, si vera dicit Meibomius, Quoniam enim ratio dupla æquatur subduplæ, tripla autem subtriplæ, & quadrupla subquadruplæ, atq; sic in infinitum: ergo ratio subdupla minor est subtriplâ, & hæc subquadrupla; atq; sic in infinitum. Nempe unò absurdo dato sequuntur infinita. Erunt ergo, ut 2 ad 8, sic 64 ad 16. juxta Meibomium. Equidem Marce Meibomi, si magno in ære alieno esses, crederem facile propriam

X x 3

Ob

ob causam, hoc abs te insipidum dogma esse confic-  
tum, ut magnis creditoribus magnis nugis satisfaceres.  
Si enim quisquam centum millia æris pluribus credi-  
toribus unive deberet; bona autem ipsius non nisi  
millia æris æquarent: tuâ quidem doctrinâ multum  
proficeret: cunctisque creditoribus facile satisfaceret.  
Cum enim ratio bonorum ipsius ad debitum, sit sub-  
centupla; ratio autem debiti ad bona centupla: juxta  
te autem, ratio centupla & subcentupla æqualis: ergo,  
cum ratio bonorum ad debitum, quæ est subcentupla,  
æquetur rationi debiti ab bona, seu centuplæ: omni-  
bus ergo creditoribus satisfactum est. In libris enim  
mercatorum, quando rationes crediti æquantur ratio-  
nibus debiti: omnia salua sunt, fidesque arcæ integra.  
Omnibus ergo obærat is magnam hac in parte gratiam  
faceres: si tamen verborum Christi meminisse nol-  
lent. *Quodcunque vultis ut vobis faciant homines, id &  
facite iis. & quod tibi non vis fieri, alteri ne feceris.* Sa-  
ne Marce Meibomi, non mihi persuadere possum,  
hanc doctrinam tibi ipsi placituram. Si enim quis tuæ  
illius pulchræ sapientiæ cupidus, binis mensibus ope-  
ram tibi navare vellet, atque pro illis octo tibi aureos  
polliceretur: postea vero pro cæteris omnibus mensi-  
bus proportionaliter. Transacto autem XVI. men-  
sum spatio: quando tu nummos tuos rogares: is pœ-  
nitentia ductus, quod bonas horas tam malè lo-  
casset, tergiversari inciperet, teque tuis artibus pete-  
ret: crediderim facile, id gratum tibi non futurum,  
si pro



si pro 64 aureis, solos tibi quatuor numeraret. Neque  
 tamen ulla te injuria afficeret: cum ex tuis principiis  
 hanc sapientiam hausisset. Pollicitus enim est, se tibi  
 proportionaliter pro cæteris mensibus daturum. At  
 vero, juxta te, ubi æqualiras rationum; illic propor-  
 tio. Sunt vero juxta te, æquales hæ rationes, 16 ad  
 64, & 16 ad 4. Ratio enim 16 ad 4 est quadrupla.  
 Ratio autem 16 ad 64 subquadrupla. At si æquales  
 hæ rationes, ergo hic est æqualitas rationum, adeoque  
 proportio. Dabit ergo tibi juxta tuam proportionem  
 quatuor aureos, pro sexaginta quatuor aureis. Ego  
 quidem, aliique omnes mortales calculum ita pone-  
 remus: si duo menses dant octo aureos, ergo 16. men-  
 ses dabunt sexagintaquatuor aureos. Nam ut duo ad  
 octo, sic sedecim ad sexaginta quatuor. Is autem  
 tuæ sapientiæ consultus responderet, ut sedecim ad  
 sexaginta quatuor, sic sedecim ad quatuor. Sunt enim  
 rationes hæ, æquales invicem, quadrupla nempe sub-  
 quadruplæ: adeoque vere hæc sunt juxta te propor-  
 tionalia. Unde is, qui pro duobus mensibus octo  
 aureos promiserat: proportionaliter, hoc est, juxta  
 tuam proportionem, pro sedecim mensibus tantum  
 quatuor aureos daret. adeoq; tua tibi sapientia no-  
 cumento ac detrimento foret. Equidem non dubi-  
 to, quin pro egregia tua prudentia, aliquod effugium  
 quæras, ne tam claræ veritates cæcutientem te lumine  
 suo enecent. Nam & exceptionem quandam propo-  
 nis. Dicis enim rationem duplam æqualem esse sub-  
 duplæ

duplæ in suo genere. Sed existimás ne quemquam sapientum adeo simplicem fore, ut tuis sibi verbis imponi patiatur. Quid est æquale, Marce Meibomi? Id quidem quod eandem quantitatem habet: seu, cui altera ejusdem generis quantitas æqualis datur. Si enim diversi generis quantitas fuerit: non comparantur invicem. Ita ergo duæ ulnæ Selandicæ æquales sunt quatuor pedibus Rhinlandicis in suo genere, hoc est in magnitudine. Quoad numerum enim, æquales non sunt. Omnes ergo res quæ æquales dicuntur: secundum idem genus quantitatis tales esse dicuntur. Quod ergo ais, rationes excessus & defectus invicem esse æquales, duplam nempe subduplæ, & triplam subtriplæ, in suo genere: nihil aliud dicis quàm modo esse æquales quo aliæ omnes res quæ æquantur sibi, etiam sunt æquales: hoc est quatenus eandem vel æqualem ejusdem generis quantitatem habent. At si hoc modo æquales sunt: etiam proportionales juxta te erunt: omnesque illæ absurdæ conclusiones, quas antea proposui, juxta te erunt verissimæ. Quod si alio in genere considerari hæc velis, quàm juxta quod comparantur: nihil quidem Euclidi contrarium dices, sed magno conatu magnas nugas ages. Si enim Sophistarum more progredi volueris facile doctrinam hanc tuam confirmabis. Quatuor enim pedes æquantur binis ulnis. At quaternarius est duplex binarii: ergo duplum æquatur dimidio. Hæc quidem inter sophistica proponi possunt. Sed apud sapi-



sapientes viros, ne audiri quidem digna sunt. Quoniam enim duæ ulnæ quatuor pedes faciunt, ergo magnitudo utrinque eadem est: quamvis, ob diversitatem mensuræ, alio atque alio numero exprimatur. Tum quoque Logici contra hanc argumentationem statim dicent, quatuor in ea terminos esse. Majorem enim agitur de magnitudinibus: minor, de numeris. Quamvis ergo duæ res, aliquando, non quatuor tantum, sed & mille & centum mille rebus sint majores: non tamen ideo dimidium aut submillecuplum, duplo aut millecuplo majus est. Dupla enim quantitas est, quæ aliam quantitatem bis in se continet. At magnitudo quatuor pedum magnitudinem duarum ulnarum semel tantum in se continet. Adeoque ipsius dupla non est. Unde nec dupla ratio ullo modo probatur rationi dimidiæ esse æqualis. Potest enim fieri, ut duæ res fiant æquales quatuor rebus: sicut duæ ulnæ æquantur quatuor pedibus. Neque, tamen ideo dimidium æquatur duplo.

## CAP. XIX.

Sed ut vanissima hæc argumenta & exceptiones Meibomii cuiusvis ob oculos ponantur; & qui ratiocinari novit, faciliore negotio omnia perspiciat: hoc capite argumenta quædam, Syllogismo inclusa, proponam.

*Quicquid majus, minus aut æquale dicitur, id simpliciter tale esse censetur, quoad quantitatem. Ratio major, minor, aut æqualis alteri dicitur, tam Meibomio*

Yy

bomio

*bomio quam Euclidi. Ergo talis simpliciter esse censetur quoad quantitatem.* Major propositio est clara. Nihil enim in Geometricis, majus, minus aut æquale esse dicitur, nisi respectu quantitatis ipsius. Scio quidem alicubi, in usu vulgari, formulas quasdam dari, quæ aliter explicari possunt. Sed Euclides, contra quem disputat Meibomius, propriè & accuratè loquitur. Si ergo hunc falsi arguere velit Meibomius, etiam propriè & accuratè loquatur: ut id falsum esse demonstret, quod Euclides verum esse dicit. Minor propositio est utrinque concessa. Non enim disputat Meibomius, an rationes quantitatem habeant: sed posito, quantitatem eas habere, dicit, Euclidem in eo falsum fuisse, quod eas minores dixerit, quæ reverà sunt majores. Si ergo ratio una altera minor est, & major: certe rationes quantitatem habent secundum Meibomium: & quatenus quantitatem habent, majores minoresve aut æquales dicuntur. Conclusio ergo clara est. Unde rursus tale argumentum in medium adduco.

*Ex quo solo quantitas rei alicujus dependet; ex hoc solo, magnitudo, æqualitas & parvitas rei dependet. Ex sola quantitate antecedentis termini respectu consequentis dependet omnis illa quæ in rationibus consideratur quantitas. Ergo ex sola quantitate antecedentis termini respectu consequentis, magnitudo, parvitas aut æqualitas rationum dependet. Major clara est, ex præcedentibus. Minor etiam omnibus cog-*



cognita est. Si enim, antecedens terminus consequentis duplus sit, ratio est dupla: si consequentis triplus, ratio est tripla: si consequenti æqualis, ratio est æqualitatis: si consequentis subduplus, ratio est subdupla: atque sic in infinitum. At duplum esse, triplum esse, subquadruplum esse, est illa quantitas quæ in rationibus consideratur. Conclusio ergo manifesta est, quod ex sola quantitate antecedentis termini, respectu consequentis, magnitudo, parvitas aut æqualitas rationum dependeat.

Illud ergo quod antea Geometricè capite XIV. demonstravimus, ex hoc nostro Syllogismo verissimum esse cognoscitur: nempe, reductis binis rationibus ad idem consequens, illam majorem esse, cujus antecedens majus: illam verò minorem, cujus antecedens minus. Quoniam enim ex quantitate antecedentis termini, respectu consequentis, dependet magnitudo, parvitas & æqualitas rationum: ergo, quarum antecedentia, respectu ejusdem consequentis, majora sunt; earum rationes sunt majores: & quarum minora, illæ minores: denique, quarum antecedentia æqualia, illæ rationes æquales. Veritas ergo certissima assertionum Euclidearum antea pluribus demonstrata, hinc quoque clarissimè patet. Unde falsitas dogmatum Meibomii una patet. Quod enim vero contrarium est: id falsum est. At Meibomius contraria hac in re Euclidi se asserere gloriatur. Quicquid ergo excipit, & quocumque modo se expedire conatur Meibomius, vanus falsusque, depre-

henditur. Quibuscunq; enim verbis hæc explicue-  
rit, nisi id ipsum planè, vel verbis, vel re dixerit, quod  
Euclides; falsum planè dicet, utpote vero contrarium.  
Si verò, sua ita interpretari voluerit, ut cum Euclide  
conveniant; jam ideo falsus est, quod Euclidem falso  
accusaverit. Verùm neq; crediderim, Meibomii ver-  
ba ullam talem explicationem latura. Clare enim &  
perspicue ait: *Rationem duplam æqualem esse subdu-  
plæ hoc est dimidiæ*, unde & tripla subtriplex æqualis erit;  
atq; sic in infinitum progrediendo. Hoc enim funda-  
mentum est argumentationis Meibomianæ. Si enim  
ratio dupla æqualis est subduplex seu dimidiæ, & subtri-  
pla æqualis triplex, atq; sic consequenter: ergo cum ra-  
tio tripla sit major dupla; erit & subtripla, major  
subdupla. Sed eodem jure concluderim ego, subtri-  
plam rationem majorem esse dupla. Quod enim  
Meibomius ait æquales esse rationes duplam & sub-  
duplam in suo genere, id sententiam ipsius plane non  
juvat. Quatuor enim pedes Rhinlandici æquales  
sunt duabus ulnis Sælandicis seu nostris in suo genere,  
hoc est, in magnitudine: quoad numerum enim æqua-  
les non sunt. Adeoque, quicquid æquale est, æqua-  
lem habet quantitatem in eo, juxta quod æquale di-  
citur. Rationes ergo dupla & subdupla, si in suo  
genere, hoc est quatenus in uno genere conveniunt,  
æquales sunt: invicem ergo eandem vel æqualem  
habebunt quantitatem. Æqualitas enim in Geome-  
triciis ex sola quantitate æquali dependet. Argumen-  
tum



tum igitur tale sit. *Quicquid æquale alteri est, id æquale alterius quantitati quantitatem habet. Rationes subdupla & dupla Meibomio æquales sunt. Ergo æqualem habent quantitatem.* Quantitas autem rationis duplæ est dupla, & quantitas rationis subduplæ est subdupla. Ergo quantitas dupla æquatur quantitati subduplæ seu dimidiæ. Quo posito, jam ex falsis consequentiis Meibomii argumentor. Si quantitas dupla æquatur subduplæ: ergo quatuor pedum magnitudo æqualis est duum pedum magnitudini. Sed falsum posterius: ergo & antecedens. Ergo & ea omnia falsa, unde hæc tam vana dependent.

Alterum autem argumentum, ex quo hoc manifestè falsum problema probare conatur: æque quidem falsum est, sed minus ferendum: quod in impium quoddam dogma Meibomium detruferit. Dicit rationes duplam & subduplam æquali intervallo abesse à ratione nihili: ideoque, inter se esse æquales. Ut autem scias quid ratio nihili Meibomio sit, ipsum loquentem audi pag. libri sui 190. lin. 18. *Ceterum illarum rationum mediam, quæ ex æqualibus terminis constat, quam propterea æqualem veteres appellârunt, nihili rationem vocat Euthymius, quemadmodum o nota nulla seu siphra in absolutis numeris nihilum significat. Illas autem rationes, quæ ex inæqualibus terminis constant, quarum infinitus numerus est ab utraqve parte nihili rationis ita discriminat, ut*

Y y 3

quarum

*quarum antecedens terminus major est termino consequente, adeoque nihili ratione sunt majores, λόγος ὑπερβολικός Excessivas rationes, generali nomine adpellet: sed quarum contrà antecedens terminus minor est termino consequente, quæ ideo nihili ratione sunt minores, eas vocat λόγος ἐλλειπτικός rationes Defectivas. quomodo ratio  $\frac{2}{4}$  est excessiva, cujus defectiva est  $\frac{4}{2}$ . Hæc sunt ipsius Hermotini verba sub Euthymii, hoc est Meibomii persona prolata. Verum vel hinc clarum sit, quanta sit vis veritatis, ut etiam nolentes trahat. Ipsemet Meibomius ait rationes excessûs esse majores ratione nihili, rationes vero defectûs, minores ratione nihili. At si rationes defectûs seu defectivæ sunt minores ratione nihili; ratio autem nihili minor rationibus excessûs: ergo, & rationes defectûs minores sunt rationibus excessûs: adeoque subdupla ratio minor ratione dupla, neque eidem æqualis. Hæc clarissime fluunt ex ipsius Meibomii verbis, quæ ipsemet sibi ipsi tribuit: quæque iuter essentialia doctrinæ suæ proponit. Sed & planè certissimum illud principium pro vero agnoscit, rationes illas majores esse, quarum antecedentia majora: minores autem quarum antecedentia minora. Verba ejus clarissima sunt, quæ antea adduxi, quæque hoc simpliciter indicant: ideo rationes defectivas, nihili rationibus esse minores, quod earum antecedentes termini minores sint termino consequente: excessûs autem*



autem rationes, ideo majores ratione nihili, quod antecedens illarum terminus major sit termino consequente. At si ideo rationes sunt majores, minorésve ratione æqualitatis; quia antecedens terminus est major minorve consequente termino: ergo, quarum antecedens terminus major est, illa ratio major: & quarum antecedens terminus minor est, illa minor. Quod certissimum verissimumque principium, antea capite XII. & XIV. demonstravimus. Neque Meibomius excipere potest hæc se ex aliorum mente dicere: cum & Euthymii sententiam recitet, hæcque claris & absolutis verbis proponat. Sed Meibomiani dogmatis constantiam antea monstravimus capite XVII. de ratione æquali & proportionem generante. Id vero præterire nequeo, quod ait, *rationem æqualitatis seu quæ est inter duas res aut terminos æquales, se vocare rationem nihili*: præsertim cum in præfatione scripti sui dicat *Deum ipsum considerari in ratione nihili*. At si Deus consideratur in ratione nihili, consideratur in ea juxta Meibomium, quæ duos terminos æquales habet. At termini non sunt in Deo. Quicquid enim in essentia Dei est, Deus est: neque ab essentia ullo modo distinguitur. Vnus ergo terminus cum Deus sit: alter terminus erunt res creatæ. Præter Deum enim nihil est non creatum. Cum ergo Deus consideratur in ratione nihili, hoc est, ex sententia Meibomii, illa, quæ duos terminos æquales habet; erunt ergo æqualia Deo: sed hoc falsum

falsum iisq; contrariū quæ ait Propheta, imo Deus ipse apud Esaiā. *Cui rei comparabitur?* Si enim consideratur in ratione nihili, habet alium terminum sibi æqualem. At unus tantum Deus est: cetera omnia creata. Ergo creatura alter terminus erit: hæcque Deo æqualis, si credimus Meibomio. Equidem non tam impium Meibomium arbitror, ut hæc asserat: At debbat tibi in memoriam revocasse Poetæ illud:

*Quærite materiam vestris, qui scribitis, æquam Viribus,*

neque ea tractasse quæ non intelligit. Quid porro est ratio nihili? Certè, omnes res, si cum Deo comparentur, verè sunt in ratione nihili. Sunt enim ut nihilum. *Omnes enim gentes quasi nihilum & inane reputatae sunt ei* Esaiæ XL. Hæc ergo est ratio nihili, quando aliquid, cum nihilo comparatur. Est enim ratio nihili ad aliquid. Tum quoque ratio finiti ad infinitum certo modo potest appellari ratio nihili: quod nulla dari possit comparatio inter finitum & infinitum, non magis, quàm inter aliquid & nihil. Talis autem non est ratio æqualitatis. Est enim inter duas res æquales. Ineptit ergo Meibomius, qui heic nodum in scirpo quærit. Optimè enim ratio hæc, quæ est inter duos terminos æquales, ratio æqualitatis appellatur. Malè autem imò pessimè ratio nihili vocatur, præsertim si Deus juxta Meibomium in hac ratione considerari debeat: cum nil, præter Deum, æquale sit Deo.

Quod



Quod autem rationes excessivas & defectivas Meibomii attinet: nihil in iis novi, quoad res ipsas, invenit Meibomius. Sunt enim eadem, quas omnes Geometrae sub nominibus majoris minorisve æqualitatis cognitae habent. An vero inde egregiam laudem, ac spolia ampla referat, quod duas voces barbaras in Geometriam introduxerit? id sapientibus dijudicandum relinquo. Satis est, nihil eum novi invenisse, aut Geometras hac in parte docuisse.

Ab hac autem ratione æqualitatis, quam ille nihili vocat, rationem duplam & subduplam æquali remotam intervallo Meibomius ait: unde concludit, æquales ipsas rationes esse. Argumentum ejus syllogismo comprehendam, ut insignem omnes Meibomii dialecticam admirentur. Hoc ergo est. Quæcunque æquali intervallo ab æqualitate distant, ea inter se sunt æqualia. Rationes dupla & subdupla æquali ab æqualitate distant intervallo. Ergo ratio dupla & subdupla sunt inter se æquales. Sed, non mirum est, quod Meibomius Euclidi contraria scribat: cum ipsemet, ne eas quidem veritates perspicere valeat, quæ longè sunt clarissimæ. Sane, conclusio ipsa, in hoc argumento, facile ipsum docere poterat, præmissa non esse vera. Utraque enim propositio non tantum probatione indiget; sed & falsa est. Audiamus tamen Meibomium hæc explicantem pag. 106. 107. & 121. & propria principia evertentem. *Cum itaque ratio sesquialtera & tanto spatio absit à ratione ni-*  

Zz
bil;

hili  $\frac{4}{3}$ . quanto spatio ab eadem nihili ratione  $\frac{4}{3}$  abest ratio subsequaltera  $\frac{4}{3}$ ; hæ duæ rationes sesquialtera & subsequaltera inter se sunt æquales; quamvis non sint eadem: quod una tanto excessu nihili rationem superet, quanto defectu altera à nihili ratione deficit: seu quod una tanto spatio ad dextram distet, quanto altera ad sinistram. Inter se autem duæ hæ rationes sesquialtera & subsequaltera distant ratione bissequaltera, seu duplasuperquarta, quod etiam ex additione fit manifestum ..... Similiter ratio bissequaltera, seu duplasuperquarta  $\frac{8}{3}$  major est, quam ratio subbissequaltera, seu subduplasuperquarta ratione quatersequaltera, seu ratione bisduplasuperquarta, hoc est ratione quintupla supersextadecima. Pagina vero 121. ait. Essentia autem sua subdupla ratio æqualis est rationi duplæ; quia distantia magnitudinum utriusque rationis est æqualis. quippe inter duplæ rationis magnitudines  $\frac{E}{F}$ ,  $\frac{G}{H}$  tanta distantia est, quanta inter subduplæ rationis magnitudines  $\frac{M}{N}$ ,  $\frac{O}{P}$ . At vero, cum in diversas partes hæ rationes tendant, dupla ascendendo, descendendo subdupla: ratio dupla superat rationem subduplam ratione quadrupla. Superat autem ratio quadrupla rationem subquadruplam ratione sedecupla. Hæc verba ipsius Meibomii sunt: quæ ne à me conficta arbitreris, ipsum ut legas peto. Videbis enim nil magis sibi ipsi unquam contrarium: nil, quod plura absurda simul continuerit. Si enim ratio dupla superat subduplam, & quadrupla subquadruplam



druplam; ut disertis verbis heic affirmat Meibomius: ergo ratio dupla major est subdupla: & quadrupla subquadrupla. Quod enim certa qvadam parte aliud superat, id majus est. Imò disertis verbis affirmat Meibomius rationem  $\frac{2}{4}$  seu bissexquialteram sive duplam superquartam majorem esse ratione subbissexquialtera seu  $\frac{3}{4}$ . At si ratio 9 ad 4, major est ratione 4 ad 9. causa non est, qv in ratio 8 ad 4, etiam major sit quam 4 ad 8. adeoque dupla ratio, major subdupla. Quod quidem longè verissimum est: sed Meibomio plane contrarium. Ipsemet igitur propria principia penitus evertit.

Sed his omnibus sepositis, formetur argumentum, ex terminis Meibomianis, pro confirmatione majoris propositionis in dato syllogismo. Hoc ergo tale erit. *Quarumcunque rationum magnitudines equaliter distant, illæ rationes sunt æquales. Rationum duplæ & subduplæ magnitudines, equaliter distant. Ergo, rationes dupla & subdupla sunt æquales.* Major minorque est Meibomii, ipsæque conclusio Meibomiana. Sed omnia æque falsa. Magnitudines autem vocat Meibomius terminos rationum. nempe in fig. libri sui, paginâ 120, magnitudines rationis duplæ sunt lineæ EF GH, magnitudines vero rationis subduplæ sunt lineæ MN, OP. Distantiam vero vocat, quando antecedens rationis excessus consequens eadem qvantitate excedit, qua antecedens rationis defectus. Ita enim in schemate ponit EF excedere magnitudinem HG.

Z z 2

eodem

eodem intervallo, seu eadem quantitate FH, qua MN exceditur à PO. nempe NP. Malè quidem voces distantiae & intervalla huic rei applicantur. Quaecunque enim distantia fuerit terminorum ejusdem rationis: eadem semper est ratio. Si enim EF fuerit 8. pedum, HG autem 4 pedum: sive magnitudines hæ unam faciant lineam in duas partes inæquales divisam; sive vastissimo intervallo sejungantur, & tanto quantum est ab extimo cœlo ad hunc nostrum orbem: eadem semper est ratio. Malè ergo Meibomius vocibus hisce utitur. Indicat vero per hæc differentias excessus & defectus; sicut ex schemate ipsius patet: ut jam vidimus. Hæc ergo Meibomii propositio erit claris verbis concepta, *illa ratio æqualis est alteri, cujus excessus, alterius defectui, æquatur.* At hoc falsum esse clarissime liquet. Sint enim duæ rationes 20 ad 18, & 16 ad 18, una excessus, altera defectus. Jam excessus unius æquatur defectui alterius. Si enim auferatur à 20 excessus ultra 18. hoc est, binarius; ipsi autem 16 addatur defectus ab 18 seu binarius: remanet utrinque ratio æqualitatis, nempe 18 ad 18. Distant ergo magnitudines harum rationum æqualiter ab æqualitate. Unde juxta Meibomium hæ rationes erunt æquales, sesquiquina, subsesquioctava. 20 ad 18, seu 10 ad 9, rationi 16 ad 18, seu 8 ad 9. Eodem modo, ratio 6 ad 12, æqualis erit rationi 18 ad 12. Si enim senarius, qui est excessus 18 supra æqualitatem seu 12, auferatur à 18, idemque addatur senario; habetur æquali-



qualitatis ratio, nempe 12 ad 12. At juxta Meibomium. *Quarum rationum magnitudines, seu termini æqualem distantiam habent, eæ rationes sunt æquales.*

Termini autem, (ita enim loco laudato ipsemet Meibomius explicat, magnitudines) rationum 18 ad 12. & 6 ad 12. æqualiter distant ab æqualitate seu à 12. Tanto enim intervallo abest 18 à 12 in excessu, quanto sex à 12 in defectu. Ergo ratio 6 ad 12 seu subdupla æqvatur rationi 18 ad 12 seu sesquialteræ. Quæ quidem omnia vana sunt ac falsa. Unde & præmissa falsa sunt. Video quidem originem erroris Meibomiani, quem & antea attigi. Nempe, cum ex Mathematicis didicisset, proportionem quandam esse (nempe Arithmeticam) qua excessus unius termini, æquatur defectui alterius: sciret autem in proportionem Geometricam rationes esse æquales: ergo, confusa proportionem Geometricam & Arithmeticam, id illi tribuit, quod huic tantum conveniret. Verum enim est, in proportionem Arithmeticam, unam magnitudinum tanto intervallo excedere æqualitatem, quanto altera ab æqualitate deficit. Sed id in proportionem Geometricam verum non est. Tum enim Arithmetica & Geometrica proportio eadem esset. Distinxere autem Veteres sapienter inter hasce duas: sicut ex Platone antea planum fecimus. Neque Meibomius probe argumentabitur, si, cum Euclides de proportionem Geometricam aliquid demonstret: is illud verum non esse dicat in proportionem Arithmeticam. De eo enim du-

ZZ 3

bium

bium non est : neque id, vel Euclides, vel ullus Geometrarum affirmat : sed contraria docent qui de eo quicquam scripsere.

## CAP. XX.

Atque ex his liquet, etiam alterum membrum argumenti Meibomiani falsum esse: nempe, rationes duplam & dimidiam seu subduplam æqualiter distare ab æqualitate. Primò enim verum non est, magnitudines harum rationum æqualiter distare ab æqualitate, ut ipse Meibomius ait: seu, quod idem est, juxta schema Meibomii, excessum unius magnitudinis æquari defectui alterius. Si enim rationes comparari invicem debent, omnino prius sunt reducendæ vel ad unum consequens ambæ, vel ad unum antecedens: alias de quantitate earum nihil certi affirmari poterit. Quæ enim mensurari debent invicem, ad communem mensuram necessariò sunt applicanda. Si enim agrum quendam perticâ incompertæ longitudinis mensuraveris, alium vero agrum decempedâ, quantitas agrorum inter se non datur, quæve alterum excedat majore sit. Ita quoque rationes quæ invicem mensurantur, ad communes terminos, vel idem consequens, vel antecedens sunt reducendæ. Hoc vero si fiat: nunquam antecedens rationis duplæ, eodem intervallo excedet consequens, quo antecedens rationis subduplæ exceditur à consequente. Conferantur enim inter se rationes 20 ad 10, & 30 ad 60. quarum quantitas ut perspicatur:



tur: reducantur ad commune consequens, vel antecessens: sitque ratio 5 ad 10 æqualis 30 ad 60. Ratio autem 20 ad 10 est dupla; ratio 5 ad 10 subdupla. At major est distantia 20 & 10, quam 5 & 10. Quod si Meibomius urgeat se necessario duos tantum terminos considerare velle: ajo ipsum lucem fugere, atque ex iis argumentari, unde nulla demonstratio. Si enim dicat rationem AB ad BC in fig. XXIV. æqualem esse rationi BC ad AB, quia AB eadem magnitudine excedit ipsam BC, qua BC excedit ab AB: dico id falsum esse, neque ex ullo certo principio probari. Imo contrarium ex claris principiis patet. Sit enim AB 20 partium, qualium BC 10. Est ergo, ut BC ad AB, hoc est, ut 10 ad 20, sic BD ad BC, seu 5 ad 10. Ratio ergo DB ad BC seu, 5 ad 10 est æqualis rationi BC ad AB seu, 10 ad 20. At ratio BC ad AB juxta Meibomium est æqualis rationi AB ad BC. ergo & ratio DB ad BC juxta eundem æqualis erit rationi AB ad BC. Quæ enim eidem æqualia, etiam inter se sunt æqualia. At si hoc verum: utique pars ad idem æqualem habebit rationem toti. Quæ autem æqualem ad idem. rationem habent, ea inter se sunt æqualia. Ergo pars erit æqualis suo toti. Hæc sunt consequentiæ Meibomianæ. Quod verò ait Meibomius ideo rationem subduplam æquari duplæ, quod eadem operatione, ambæ rationes ad æqualitatis rationem reducantur: id falsum est. Verum quidem est mutua antecedentium & consequentium multiplicatione reduci ambas ad æquali-

qualitatem. Sed hujus rei ratio ex præcedentibus petenda est. Quando enim ratio excessûs conjungitur cum ratione defectûs, tum, illa quidem dividitur ac imminuitur, hæc autem componitur atque augetur. Ideoque, in illa conjunctione duplex est operatio, hujus quidem divisio, alterius vero compositio. Antea enim demonstravimus omnes rationes fieri ex ratione æqualitatis, excessûs quidem componendo, defectûs vero dividendo. Si ergo defectûs rationes ad æqualitatis rationem reduci debeant: contraria operatione id fieri oportet, nempe componendo: & sic rationes excessûs dividendo. Eodem modo, quo si magnitudo BD foret subseptupla ipsius BC, AB autem ejusdem BC septupla, si AB divideretur in septem æquales partes, & BD multiplicaretur septies, factum utrinque foret æquale. Ita etiam si ratio subseptupla per septuplam componatur, & ratio septupla per subseptuplam dividatur, utrinque prodit æqualitas: cujus rei demonstratio ex iis petenda est, quæ de divisione & compositione rationum antea sunt dicta. Liqvet ergo ex his, ea omnia quæ Meibomius contra Euclidem adducit, non tantum incertis & dubiis, sed & plane falsis principiis niti. Neq; aliter fieri poterat. Cum enim certis ex principiis demonstratum antea dederimus, Euclidis assertiones longe esse verissimas, impossibile plane est, contrarium ipsarum falsum non esse. Nihil enim simul verum & falsum esse porest. Quod autem exempla ipsius attinet, ea omnia, vel nihil plane concludunt, vel id



id quod nos hucusque demonstravimus. Adeoque nulla in re ipsi usui sunt. Quæ enim itinera inter se sunt æqualia, sive à dextris, sive à sinistris, sive ad Orientem, sive ad Occidentem instituantur: semper sunt æqualia. Unde id, quod est in quæstione, probare nequeunt, rationem duplam æquari dimidiæ. Quid enim ad rem facit, si Sejus versus sinistram progrediendo duplum itineris Nonii fecerit: Mævius vero ad dextram pergendo, æquale quidem iter Sejo, duplum vero Octavio Nonioque fecerit? Si enim iter Seji duplum est itineris Nonii, æquale autem itineri Mævii: erit & iter Mævii, duplum itineris Nonii: ratioque itineris Seji & Mævii, ad iter Nonii & Octavii æqualis, utpote dupla: ratio vero itineris Nonii dimidia, adeoque minor. Sed neque exemplum illud, quod de mercatoribus Cajo, Lucio, Mævio, Sejo &c. ponit, huc quicquam facit. Qui enim nihil in bonis habent: neque quoad opes possunt cum divitibus comparari: cum nulla ratio sit inter aliquid & nihil. Bona quidem cum ære alieno comparari possunt. Sed ut duæ res, quæ quantitatem habere considerantur. Ac si bona excedant debitum: ratio quidem bonorum est excessus: si vero debitum excedat bona, ratio æris alieni est excessus. Adeoque, ex his nulla demonstratio de rationibus petitur: cum utrique parti eadem rationes conveniant. Denique, quod ex musica adducit, si æqualibus chordis appendantur inæqualia pondera, uni quidem 18. alteri 12. tertiæ 8. faciet quidem

A a a

dem

dem prima ad secundam, diapente intensum : tertia vero cum secunda, diapente remissum. Quod si ergo illi soni majores sint appellandi, qui ex maiore tensione proveniunt : major sonus erit diapente intensum, minor diapente remissum : adeoque, ratio sonorum dependebit ex ratione tensionum, hoc est, ex ratione ponderum. Unde erit in diapente intensum ut 18 ad 12 : in diapente remisso, ut 8 ad 12. adeoque illic ratio major, heic minor. Ipsa ergo meibomii exempla contra ipsum concludunt.

Id ergo demonstravimus meibomium Euclidem ceterosque Geometras falsi atque ignorantiae accusando, miras falsitates committere : & eos quidem ab errore liberos esse ; ipsum vero meibomium falsissima, quæque clarissimis accuratissimis axiomatibus convincuntur, in medium adferre. Atq; hoc modo, verum quidem est, marcum meibomium nova quædam proposuisse : quæ tamen talia sunt, ut nemo, qui inter verum ac falsum distingvere potest, ea ab ipso discere percipiat. In Euclide enim accusando plane se insensatum, si non mente captum monstravit : quod ea pro veris supponat, quæ nemo sana mente præditus falsum esse non videt : in Theone autem ceterisque Geometris insignem vel oscitantiam, vel stuporem, vel malitiam : cum earum rerum ignorantiam iis objiciat, quas optime noverunt. Unde vanissima & falsissima est ipsius jactantia, quæ pagina nona libri sui proponit, quamq; nos pagina 4. sub initium hujus operis exscripsimus. Verba iterum repetam.



repetam. Itaq; & recentiores omnes reprehendā, qui antiquos non intellexerunt; Et antiquos corrigam, qui male quædam prodiderunt; Utrosque insuper noua docturus. Verum nec ullo vel verisimili argumento probauit recentiores, antiquos non intellexisse: multo minus, antiquos Geometras male quædā prodidisse. Nova autem, Geometris vel antiquis, vel recentioribus ignorata nulla plane proposuit, præter somnia & deliria. quod illi verum esse fatebuntur, qui hæc legerint. Quæ enim de duarum linearum appropinquatione, sine concursu, in infinitum habet, illi ignorare nequeunt, qui lineam in infinitum, dividi posse norunt: quod nulli Geometræ ignotum est, Quod autem lineam in tres partes secare doceat, id faciliori methodo tyrones Geometriæ expeditum dabunt: sicut & compositionem rationum. Cætera omnia nugæ sunt & quisquiliæ, nec sapientum ocio digna. Quis enim tantam ac tam effrænam aliis maledicendi libidinem: tam portentosos errores, tam stolidam ac ridiculam jactantiam quieto stomacho ferre posset? Sane, vel ultima hæc, etiam Stico, si non bilem saltem risum moveret: cujus ego specimen, si heic dare vellem, comœdiam forte Lectori ob oculos ponerem, & post Plautum, non Militem, sed Literatorem Gloriosum conscriberem. Consilium quidem Meibomio dederim, ut si quid post hac in publicum edere velit, semper vulgatum illud ob oculos habeat.

*Nec te laudâris, nec te culpaveris ipse:  
Hoc faciunt stulti, quos gloria vexat inanis.*

Neque enim ullum videbis magis ambitiosum, qui quæ sibi plus sapientiæ tribuat, alios autem omnes præ se contemnat, quam mente motum, aut singulari quadam stultitia occupatum. Quod si existimaverit se maledicendo pervincere velle: idem ipsi eveniet quod canibus: qui, cum diu alios allatarunt, ubi se contemni viderint, nec quicquam à quoquam opponi: demum silent ingratiis. Sanè, Meibomii causa ne hæc quidem scripsissem, quamvis inter cæteros Mathematicos provocatus. Si enim corrigi vellet: vel privatâ admonitione id fieri posset. Quoniâ vero quidâ viri graves & prudentes, quibus ocium non est, ista examinandi, sententiam tamen ferre noluerint, ante rem probè cognitam: hisce demonstrare volui, omnem contra Euclidem institutam accusationem, hoc fundamento niti: *duplam rationem æqualem esse subduplæ seu dimidiæ: & triplam subtriplæ*, atque sic porro in aliis. quod, quale sit: ipsi nunc judicent.

Hac autem contra Marcum Meibomium scribendi occasione data, etiam Scepticorum, atq; imprimis Sexti Empirici argumenta examinare ac refutare coæpi, qui non unam aliquam veritatem, ut Meibomius, sed omnes in Geometria, aliisque scientiis evertere conatus est, quamvis longe majori ingenio, & argumentis perquam speciosis. Si enim Lectorem is nactus fuerit in Geometricis non probe subactum, facile



facile in errorem ipsum perducet: cujus rei nullum à  
Meibomio periculum, modo Lector ratione uti ve-  
lit. Nostra vero quod attinet, ita ea legi cupio, ut  
si qua in re lapsus fuerim, eò me modò Lector can-  
didus & benevolus erroris moneat, quo suos sibi  
nævos indicari optaret. quibus non ipse  
minus obnoxius erit, si, agendo spe-  
ctari velit.

*Hanc veniam petimusq; damusq; vicissim.*



# SUMMÆ CAPITUM.

## LIBRI. I.

### CAPUT. I.

**D**E materia & certitudine scientiarum. Cur Geometricæ & Arithmeticæ veritates, aliis omnibus in Philosophia veritatibus sint evidentiores? Geometras aliquando labi, in verbis, aut falsâ methodo. Hos qui corrigunt, laude digni: qui autem falso accusant, vituperio. Marci Meibomii jactantia; & quam vana: cum nihil novi invenerit, nisi quod falsum est. Summa totius scripti.

### CAP. II.

**D**E Sceptica Philosophia. Auctor sectæ Pyrrho. Hujus mores, instituta & vanitas. Scepticorum scire, est omnes scientias destruere. Sexti Empirici scripta.

### CAP. III.

**A**N Mathematico aliquid sit sumendum ex hypothesi. Quid sit hypothesis ex Sexto, Aristotele & Stoicis, juxta Proclum? Quid Aristarcho Samio & Archimedi? Accurata vocis explicatio. Differentia inter Axioma, Definitionem, Hypothesin & Postulatum. Qualis sit Hypothesis Geometrica? Definitiones Geometricæ. Axiomata Geometrica. De falsis hypothesebus apud Geometras.

CAP.



#### CAP. IV.

*SExti Empirici argumenta, contra Hypotheses Geometrarum, expenduntur: & , vel nihil ad rem facere; vel, ex ipsius Sexti sententia, falsa esse, monstrantur.*

#### CAP. V.

*DE definitionibus Geometricis, earumque utilitate. Puncta, lineas, superficies & corpora Geometrica, verè dari: & id esse, quod à Geometris esse dicuntur. Sexti argumenta refutantur. Punctum motum, lineam describere, demonstratur.*

#### CAP. VI.

*Lineas rectas in infinitum dividi posse, quamvis nunquam ad punctum veniatur. Concurrere autem in indivisibili seu puncto. Lineam ex punctis non componi.*

#### CAP. VII.

*DEmonstratur, maximam & minimam lineam, æqualia numero puncta habere: & tot in una concipi posse, quot in altera. Falsus ergo Sextus, qui punctum lineæ magnitudinem explere dixit. Natura indivisibilium, & in infinitum divisibilium, humano ingenio non comprehenditur. Id in numeris, quadratis, cubicis, & sic porro progrediendo, demonstratur: & quod, in infinitis, mille, & centum, & tria, & unum non distinguantur: adeoque, nec infinitorum natura percipiatur. Unde concluditur, si in naturalibus infinitis, nihil humana mens capit: multo minus, in divinis.*

CAP.

### CAP. VIII.

*S*Exti argumenta, quibus probare conatur, punctum esse diuisibile, refutantur. Demonstratur, nec puncta, lineæ; nec lineas, superficiei corporisve partes esse: quamuis eorundem sint extrema. Punctum non est in loco.

### CAP. IX.

*A*N linea sit fluxus puncti? Superficies tangunt se in linea, inque infinitum dividuntur: nec tamen unquam ad lineas peruenitur.

### CAP. X.

*S*uperficiem, neque ex lineis componi, neque in lineas dividi. In minori superficie, totidem lineas esse, quot in maxima, Geometricè demonstratur: Tam quoque, si mille, centum mille, imò, quocunque invicem in latum jungantur lineæ: unam tantum lineam facere, omnis expertem latitudinis.

### CAP. XI.

*S*Exti argumentum, de circulis latitudinem efficientibus, refutatur: unaque demonstratur, peripherias nullam latitudinem habere.

### CAP. XII.

*D*E compositione & divisione Geometrica, quomodo differt à Mechanica. Terminos in compositione

Geo-



*Geometrica tolli, sine corporis detrimento: & rursum in  
in divisione dari: In Mechanica vero, non item.*

### CAP. XIII.

*DUO Sexti argumenta refutantur, unum, quo demon-  
strare conatur, lineam, quia latitudinem mensurat,  
omnino latitudinem habere: alterum, Superficiem ex li-  
neis componi, cum evolutus, superplanum, Cylinder, in  
lineis planum tangat, planam autem superficiem describat,*

### CAP. XIII.

*DE contactu corporum, quomodo fiat? Sexti argu-  
menta refutantur, corporaque se invicem extremis  
tangere demonstratur. Alterum Sexti argumentum,  
quod corpus Geometricum sit imperceptibile, cum neque  
sine latitudine, longitudine, crassitieve sit; neque illud  
sit, ideoque nihil sit: imperitia arguitur. Multa enim in  
corpore esse accidentia, sine quibus corpus non est: nec  
tamen accidentia illa, esse corpora.*

### CAP. XV.

*DEFinitio rectæ lineæ. quid sit recta linea Euclidi?  
quid Archimedi? Utriusque definitio idem conclu-  
dere demonstratur, ex Proclo: rectæque lineæ natura  
explicatur. Sexti argumenta contra definitionem an-  
guli, Geometriæ non adversatur, nec quicquam contra  
hujus principia concludunt.*

Bbb

CAP.

## CAP. XVI.

**D**E anguli definitione. Accuratissima anguli definitio Geometriæ non necessaria. Demonstratur angulum nec in Prædicamento Quantitatis, nec Qualitatis esse, contra Eudemum Peripateticum, Plutarchum Mathematicum, ejusque asseclam Apollonium, & Carpum Antiochenum. Euclides non videtur in Prædicamento Relationis angulum ponere, quod ait Proclus. Angulus est in Prædicamento Situs. Lineam bifariam diuidi posse, contra Sextum demonstratur: nec tamen punctum ideò bifariam, ullòve modo diuidi: sicut neq; in circuli diuisione.

## CAP. XVII.

**E**uclides non omnes definitiones adduxit: sed quasdam omisit, non tantum utiles; sed etiam aliquo modo necessarias. An ideo malè tractari debeat?

## CAP. XVIII.

**D**E Axiomatibus Geometricis. Carneadis stultitia, qui Axioma hoc negavit (Quæ eidem æqualia, et jam inter se sunt æqualia) à Galeno repressa. Ea quæ nunc in editione Græca Euclidis pro Axiomatibus habentur, non omnia, ab ipso Euclide, pro talibus posita fuisse: sed tria posteriora, vel saltem duo existis inter postulata. Videri Theonem Alexandrinum, ejusve domesticos, hæc ita ordinasse, ut nunc leguntur.

CAP.



## CAP. XIX.

*A*pollonium & Euclidem in demonstrando lapsos, illum quidem, quod ea demonstrare conaretur, quæ demonstrari nequeunt, ut Axiomata; unde illud coactus fuit supponere, quod minus clarum est: hunc autem, ea pro ἀναπόδεικτοις assumendo quæ demonstrari & possunt & debent.

## CAP. XX.

*P*ostulatum illud, quod in Græcis Euclidis editionibus pro X Axiomate ponitur, omnes nempe angulos rectos invicem esse æquales, Geometrice à Proclo demonstratur. Videntur Pappus pariter & Proclus ea in re παραλογισμὸν commississe, quod angulos circumferentiarum recto æquales sint arbitrati, qui tamen recti non essent. Ipsa horum demonstratio examinatur.

## CAP. XXI.

*P*ostulatum V seu Axioma XI. (juxta codices Græcos editos I. Elem. Euclidis,) demonstratur, primum quidem à Ptolomæo, quamvis minus sufficienter: inde plenius & melius à Proclo.

## CAP. XXII.

*C*ontra Epicureos probatur, non male egisse Euclidem Veteresque ante eum Geometras, qui accurate demonstrarunt, in triangulo rectilineo duolatera majora esse tertio. Dari triangula, in quibus unum latus sit majus binis reliquis. Conclusio primi libri.

Bbb 2

LIBRI

## LIBRI. II.

### CAP. I.



*P*roæmium libri secundi. Euclidem ob quædam omiſſa, & confuſe tradita accuſari quidem poſſe: Meibomii tamen accuſationem longè ab hac diverſam, & plane falſam.

### CAP. II.

*Q*uid ſit quantum, & quotuplex? ex Archyta Tarentino. Quid ſit ratio in Geometricis, Arithmeticis & Staticis. Termini rationum. Diviſio rationum, in æqualitatis, & in æqualitatis: ac harum, in exceſſus & defectus. Altera rationum diviſio, in effabiles & ineffabiles. Effabiles aliæ ſunt ſimpliciter tales, aliæ, potentia tantum. In arithmeticis omnes rationes ſunt effabiles. Diviſio rationum effabilium exceſſus in quinque ſpecies: & defectus in totidem. Ratio multipla & ſubmultipla. ubi de ſubdupla, ſubtripla, ſubquadrupla &c.

### CAP. III.

*D*e ratione ſuperparticulari, quæ Græcis λόγος ὑπερπαραμέτρητος & dicitur: & huic oppoſita ὑπομετρητος. Ejus ſpecies varia, ſeſquialtera, ſeſquitertia, ſeſquiquarta, ſeſquimilleſima: quibus opponuntur ſubſeſquialtera. Quid ſit ratio ſubſeſquimilleſima. In numeris, pro dignoſ-



dignoscendis rationibus, semper recurrendum erit ad  
primos numeros, qui Græcis πρῶτοι dicuntur. Quid  
voces ὑπερλόγος & ὑπολόγος Græcis significant.

#### CAP. IV.

Quid sit ratio ὑπερμερής & ὑπομερής, seu superpartiens  
& subsuperpartiens? Quid πλάσσειν μέρος seu  
multiplasperparticularis? Hujus variae species, nempe  
duplasēsquialtera, duplasēsquitertia, duplasēsqui-  
quarta; & sic triplasēsquialtera, triplasēsquitertia &c.  
His autem oppositæ sunt, quibus particula sub præpo-  
nitur. Ratio πλάσσειν μέρος seu multiplasperparti-  
ens: huicque opposita ὑποπλάσσειν μέρος. Omnes ratio-  
nes effabiles paucis explicantur, tum quoque λόγος ὑπερβολῆς  
seu ratio excessus & huic opposita ratio defectus. Cur  
ineffabiles καὶ ἐξοχὴν ita appellentur.

#### CAP. V.

DE rationibus simplicibus & compositis. Quid sit  
compositio in Geometricis. Compositio alia fit ad-  
dendo, alia multiplicando. De additione rationum ex  
Euclide & aliis. Ex ratione æqualitatis omnes ratio-  
nes excessus componuntur. Usus additionis rationum  
in Mechanicis. De multiplicatione rationum. Additio-  
ne rationum ambo termini non conjunguntur. Locus  
Aristotelis explicatus. De multiplicatione rationum  
in lineis. Usus multiplicationis rationum in Harmo-  
nicis.

Bbb 3

CAP.

## CAP. VI.

**D**E divisione rationum. Hujus natura ex partium relatione ad totum explicatur, variisque exemplis illustratur, & quomodo divisio fiat multiplicando. Compositio rationum excessus, quæ καὶ ἐξῆς ita vocatur, & divisio rationum defectus, eodem fit modo: multiplicando utrosque terminos inuicem.

## CAP. VII.

**R**atio æqualis & inæqualis, quid? Quomodo rationes æquales investigentur? De multiplicatione & divisione magnitudinum, præsertim linearum. Quid ratio æqualis Euclidi & Aristoteli? quid Theoni Smyrnæo? Hic non semper satis accuratus in scribendo. Marcus Meibomius falso omnes in genere Geometras accusat. Quid rationes majores & minores Euclidi, Aristarcho Samio, Archimedi & Theodosio.

## CAP. VIII.

**D**E multiplicatione & divisione rationum secundum modum procedendi in magnitudinibus. Simplicissima Methodus multiplicandi & dividendi rationes. unde etiam natura ipsa compositionis hujus cognoscitur. Differentia compositionis & divisionis. Propositio XXIII. libri VI. Elem. Eucl. explicatur.

## CAP. IX.

**A**N Euclides Propos. XXIII. lib. VI. distinxerit inter multiplicationem & divisionem rationum. Quid  
συγκεί-



συγκρίσει & συνίσει Euclidi. De definitione compositionis rationum Euclidea. Modus dividendi rationes defectus per multiplicationem amborum terminorum invicem, idem plane est, ac ille, quo rationes excessus componuntur. hujus rei causa.

## CAP. X.

**A**Dditio, multiplicatio, subtractio & divisio rationum plenius atque accuratius explicantur. Probatur additionem rationum vcre & proprie esse & vocari rationum compositionem. Duplatio, triplatio, quadruplatio &c. rationum quid sit: ut &, quid ratio dupla, tripla, quadrupla, sesquialtera? Quid ratio subdupla, subtripla. De rationum multiplicatione & divisione: quid ratio duplicata, triplicata? ut & subduplicata, subtriplicata &c. & quomodo distinguantur à dupla, tripla, subdupla, subtripla &c. Meibomii error hac confundentis: ejusque iniqua & imperita censura. Quid διπλασίων, τριπλασίων? Geometras recte distinxisse inter rationes duplicatas & duplas. Novi heic nihil invenit Meibomius.

## CAP. XI.

**M**arci Meibomii temeritas, qui sine omni causa, imò sine omni ratione, Geometras inscitiae arguit: Græcis vero doctissimis, iisque satis antiquis, propriae linguae ignorantiam objicit: cum tamen neque hi, neque illi quicquam erraverint. Idem in Theone

Alexan-

*Alexandrino accusando, crimen falsi committit: idque duplici nomine. Falso quoque Eutocium accusat: ut vel neutrum legerit; vel clarè ac planè loquentes non intellexerit; vel mala fide usus fuerit. Quid ποίτης & φιλικῆς Græcis Geometris & Philosophis? Sectatorum Lucii & Nicostrati error. Meibomii in his lapsus & inconstantia. Nicomachi Geraseni sententia. Insignis locus Aristotelis, qui optime explicat quid sit τὸ πᾶν: sicut locus quidam Ptolemæi τὸ φιλικόν. Quomodo differant inter se πᾶν & φιλικόν? Theo Alexandrinus & Eutocius recte rationes composuerunt: ideoque à calumniis Meibomii vindicantur.*

## CAP. XII.

*AN Euclides diuisionem rationum ignorauerit? Probatur, re & opere eam cognitam habuisse: atq; una demonstratur, compositionem rationum, quæ fit multiplicando, verè à diuisione rationum distingui. Definitiones X. & XI. lib. V. Elem. Euclid. explicantur. Methodus breuissima componendi & diuidendi rationes omnes, tam excessus quam defectus proponitur, ac Geometricè demonstratur.*

## CAP. XIII.

*DE medietatibus Geometricis, Arithmeticis & Musicis. Quid αναλογία & proportio? Locus insignis hac de re Platonis in Timæo à Cicerone Latine redditus. Quid αναλογία Theoni Smyrnæo. Infelicitas critica*

*Mei-*



*Meibomii, atque in Græcis Latinisque, imò, & in Musi-  
cis, imperitia & audacia. Scaliger & Commandinus  
iniquè atque imperitè à Meibomio accusati. Ratio-  
nes Musicæ explicantur. Locus pulcherrimus Pla-  
tonis, in Timæo, de Harmonia Universi & proportioni-  
bus ejusdem explicatus. De animæ natura ex Timæo  
Locro.*

#### CAP. XIV.

*Demonstratur Geometricè, aucto antecedente alicu-  
jus rationis, eodem consequente retento, ipsam ra-  
tionem augeri & majorem fieri : imminuto autem an-  
tecedente, rationem imminui. Retento autem eodem  
antecedente, si consequens augeatur, ipsam rationem  
imminui : & si consequens imminuatur, ipsam ratio-  
nem augeri. De ratione majore & minore : & quo-  
modo utraque inveniatur ? Ratio dupla, major esse  
demonstratur, subdupla ; & tripla, subtripla : & sic  
in infinitum.*

#### CAP. XV.

*Definitiones rationum æqualium & inæqualium  
Euclidis explicantur, falsoque à Meibomio accu-  
sari, demonstratur Geometricè. Propositiones quoq;  
Euclidis octava & decima libri quinti Elementorum  
ab iniqua & falsa censura Meibomii vindicantur, &  
verissimæ esse demonstrantur.*

#### CAP. XVI.

*Meibomii argumenta contra prædictas Propositi-  
ones examinantur. Ejus vanitas, arrogantia fal-  
sum;*

sumq; dicendi libido. Præcipui errores Meibomii, in Euclide accusando commissi, recensentur ac refutantur. Rationes excessus & defectus comparari invicem posse, demonstratur, contra Meibomium, ex variis: imo ex ipsius Meibomii testimonio. Inter quæ ratio sumatur? Mala argumentatio Meibomii. Rationes excessus & defectus communem mensuram habent.

#### CAP. XVII.

**A**N rationes excessus & defectus invicem ideo comparari nequeant, quod multiplicatæ se invicem non excedant? Posito, rationes excessus & defectus comparari invicem non posse; ne tum quidem jure Euclidem à Meibomio accusari. Quomodo ratio defectus ita possit augeri, ut rationem datam excessus superet. Inconstantia Meibomii, qui proprium dogma evertit.

#### CAP. XVIII.

**E**Xemplis illustratur Propositio illa antea Geometricè demonstrata: quarum antecedentia majora, & rationes majores: & quarum minora; minores. Meibomii principium Geometricum, manifeste falsum. Falsæ & absurda conclusiones ex Meibomii falsis principiis deductæ. Proportionalia Meibomio hæc erunt: ut. 2 ad 8, sic 64 ad 16. Inventum Marci Meibomii illis quidem utile est, qui fraudem creditoribus facere vellent: sed ita forte ipsi Meibomio noceret. Quid sit æquari in suo genere? Quid duplum? &c.

#### CAP.



## CAP. XIX.

*Argumenta contra Meibomium, ipsiusque Meibomii, Syllogismo includuntur: ut horum vanitas, illorum autem veritas facilius perspiciatur. Meibomius nullo modo à falsitate liberari potest, siue idem cum Euclide dicat, siue contrarium: cum posterius per se falsum sit; prius vero ideo Meibomium damnet, quod falso Euclidem accusaverit. Ipsemet Meibomius sua principia evertit, nostraque seu Eucidis confirmat. Ratio æqualitatis malè ac inepte à Meibomio, ratio nihili appellata. Quàm imperite de rebus sacris loquatur, dum Deum ait considerari in ratione nihili. De vocibus ipsius excessivis & defectivis. Rursum principia sua evertit, nostraque confirmat. Perversa argumentatio Meibomii. Meibomius confudisse videtur proportionem Geometricam & Arithmeticam: unde etiam error ipsius originem sumpsit.*

## CAP. XX.

*Termini rationis duplæ & subduplæ non semper invicem distant æqualiter. Meibomii absurda & falsa. Probationes omnes Meibomii vel manifeste falsæ sunt, vel nihil concludunt, vel contra ipsum concludunt. Fætantiam Meibomii falsam vanamque esse. Nihil enim novi Geometras docuisse, quod antea ignorabant, nisi quod falsum esset. Neque jure, aut ulla cum veritatis specie, vel antiquos, vel novos Geometras accusasse. Conclusio operis.*



*Scriptores qui hoc in opere laudantur, defenduntur,  
castigantur, refutantur.*

**A** Nacharhis Schyta.  
Apollonius Pergæus.  
Archimedes Syracusanus.  
Archytas Tarentinus.  
Aristarchus Samius.  
Aristophanes Comicus.  
Aristoteles Stagirita.  
Carpus Antiochenus.  
Cicero.  
Clavius.  
Diogenes Laertius.  
Euclides Geometra.  
Eudemus Peripateticus.  
Eustathius in Homerum.  
Eutocius Ascalonita.  
Federicus Commandinus.  
Galilæus Galilæi.  
Geminus.  
Homerus.  
Juvenalis.  
Lucas Valerius.  
Marcus Meibomius.  
Nicomachus Gerasenus.  
Pappus Alexandrinus.  
Plato.  
Plutarchus Mathematicus.  
Proclus Lycius.  
Ptolemæus.  
Scholiastes Euclid. Dasypodii.  
Sextus Empiricus.  
Simplicius.  
Theo Alexandrinus.  
Theodosius Tripolita.  
Theo Smyrnæus.  
Thomas Finchius.  
Timæus Locrus.



*Lectori Benevolo S. P.*

**N**on mirabere Lector, quod multa hoc in opere librariorum negligentia perperam edita atque exarata invenias; quædam vero omissa; alia autem bis posita: cum, nec ego operis corrigendis tam anxiam curam impendere potuerim, gravioribus negotiis occupatus; neque alium haberem, quem hisce rebus præficerem: ipsi quoque typographæ, ea aliquando mutare noluerint, quæ ego emendari mandabam. Pleraque tamen ex literarum similibus, aut vicinarum permutatione nata sunt: ac sæpe quidem c pro e, f pro s, n pro u, r pro t, & vice versâ, posita: in Græcis autem, x pro η, o pro υ, υ pro ν, χ pro ξ. In accentibus quoque, tonis & commatibus colisque non semel erratum: quæ tamen Lector per se facile emendabit. Ego quædam insigniora, quæ inter perlegendum occurrerunt, hæc annotare volui: atque ea quæ omissa aut depravata erant, indicare. Cætera tuo Candori atque eruditioni committo. Vale & fave, virtuti; & veritati assiduam operam impende feliciter.

*Corrigenda, addenda.*  
*Numerus barbarus, seu prior, pagi-*  
*nam, posterior seu Romanus lineam*  
*indicat.*

**P**Ag. 5. lin. I. methodo. 6. IV. accuratius 7. II. ἔφασκεν.  
 Ibid. III. αἰχρὸν 10. I. ὑποθέσεις, Ibid. XVII. ὡς πρὸ Φησὶν.  
 Ibid. XXII. ἀνύσπιν. 11. XV. figura. Ibid. XIX fuerit. Ibid.  
 XX assumitur 12. XII. δοκσημάτων 16. IV. necessario. Ibid. XIII.  
 ἔχ' ἀπλῶς. Ibid. XV. λαμβάνη, 22. XXVI. foret. 23. ult. ἐξ ἀνυπάρχων  
 24. XXI. nostrum. 31. XVII. extremum. 32. XII. punctus. Ibid.  
 XXVII. animalcula 34. II. terminatam. 37. XXIII. quod. 38. VI.  
 est lineam 39. V. lineam. AL. 40. XVI. composita, tum quoplu-  
 ra. 43. XVI. infinita. Ibid. XXVIII. infinita 51. XVII. autem.  
 52. XVIII. describatur semicirculus. 53. XII. coni. BZY. *ibid.*  
 XVII. conus BGH. secetur. 54. V. portio cylindrica. XIX.  
 quadratum. 60. II. καὶ ἰσότητι. 61. II. parallelogrammum. 65.  
 III. infinitas numero lineas. 66. XVII. angulus FbA. *ibid.* tri-  
 angulo AFb. 68. XXI. ac vastissimum. 73. IV. unicam. 75.  
 XIX. sententia. 85. XI. & D extremum lineæ 95. XVI. tamen  
 96. VI. σύνδεσμος. VII. ἀνύσπιν. 106. XV. secundum longitudi-  
 nem sumitur. 108. IX. talis *deleatur* 115. XV. *post* lineam esse in-  
 fer. Neque enim omne illud, quod juxta unum punctum di-  
 stat, lineam esse. 118. XI. figuras. 129. XXI. Φησὶν. 130. XI.  
 quartum. 140. XIII. angulus BAF. 141. V. peripheriam BM. vel  
 BI. 142. XVI. βζη, δηζ. 143. XVI. diagramma XIII. 144. XI.  
 nempe βζη & *ibid.* XV. recta, binos. *ibid.* eadē XVI. quæ in ζβ, ηδ.  
 146. VI. illud vel versus γ. *ibid.* VIII. dempto *ibid.* IX. quàm ηζκ.  
 147. XVIII. ηεζη. 148. III. αὐτὰς ηεζ, *ib.* IV. βεζ, δζε, λεγω. V. *ib.* αὐ-  
 τὰς βεζ. *ib.* VII. εἰς ζς κθ. γδ. *ib.* VIII. τὰς αὐτὰς βεζ. 151. I. objectioni.  
 155. XIV. figuram num. II. 157. V. Publicus. 160. VIII. Ar-  
 chytas.



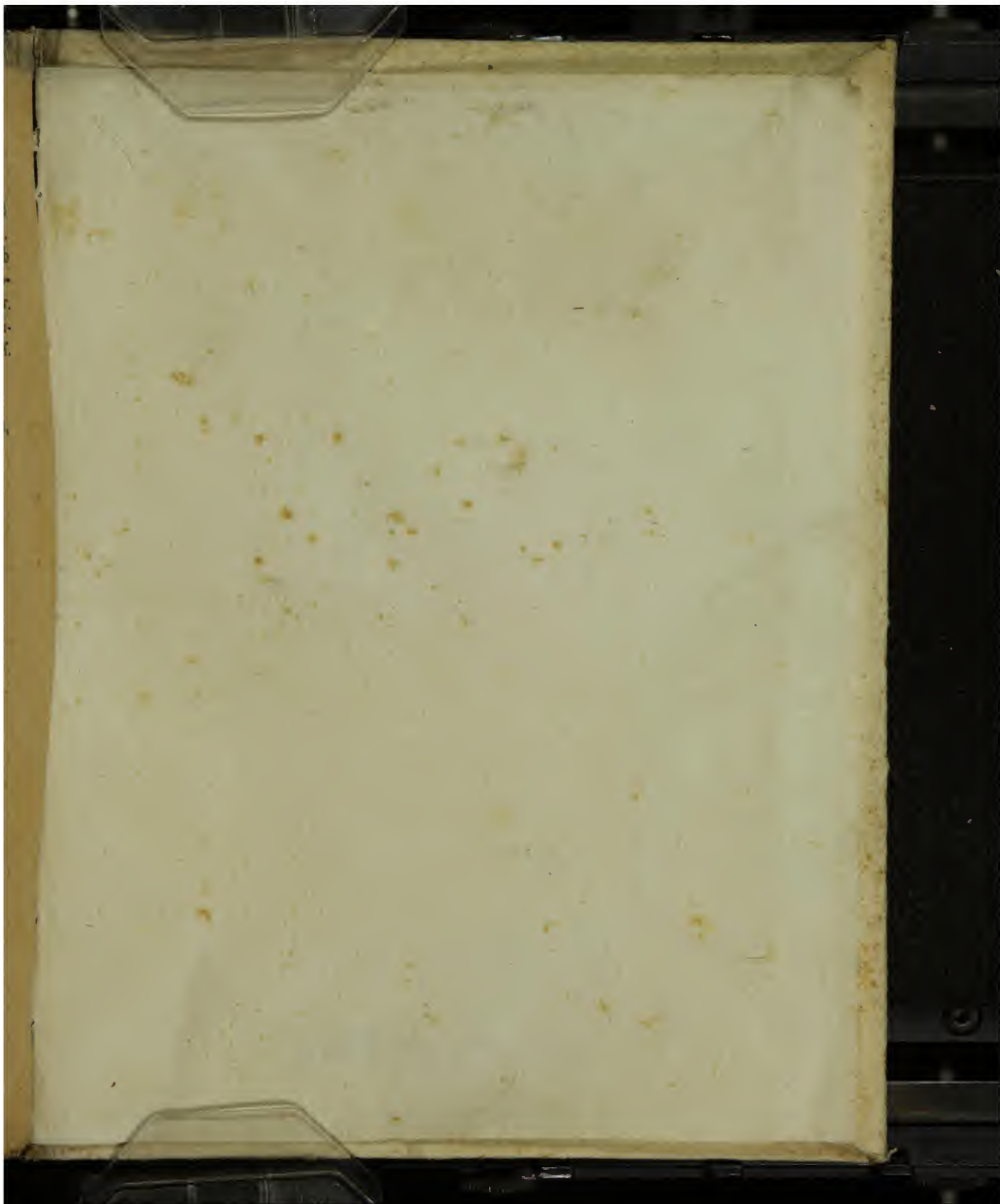
chytas. *ib.* XX. triangulare 161. IX. ὁμογενῶν, ἡ κατὰ 164. XVI. σύμ-  
 μετρα. *ib.* XVII. τῆς συμμετρίας. 166. XIII. ἡ ἐλάττωσις. 167. VII.  
 post multipla *Adde.* Vide tamen de his, quæ in sequentibus,  
 departium nomenclatura traduntur. 170. VII. πάλιν ἐν τῷ 175.  
 VI. in infinitum. 176. XV. πλεονασμῶν 178. XVIII. octuplo-  
 sesquicentesima vicesimaquinta. 179. XXII. ad 10. sesquiquin-  
 tam, ad 11. sesquiundecimam. *Ibid.* XXVII. 9 ad 12. 180. I.  
 & II. lege 11. ad 12. ὑπερπενταστήσις subsesquiquinta & denique  
 ὑπερδενικάτος subsesquiundecima 11 ad 12. *ib.* IX. nempe ὑπερ-  
 πενταμερής. *Ibid.* XI. lege 11 ad 5. est duplasesquiquinta & 5 ad  
 11. subduplasesquiquinta. *Ibid.* XIV. Denique 12 ad 5. 188.  
 XII. post verba antecedentes componuntur *Adde.* Nihilo tamen  
 minus vera est rationum compositio, quamvis ab altera quæ fit  
 multiplicando distingvatur: de quibus accuratius in sequenti-  
 bus. 189. VII. jungantur CD. GH: tota CDGH. 191. VIII. ad  
 duo. 190. XXV. constituatur in fig. num. III. ex AB. 194. VI.  
 ratio  $\frac{4}{3}$ , seu sesquitercia 195. XVII. quadrati alicujus. v. g. AB-  
 CD in fig. num. I. *Ibid.* XVIII. quadrati AF. *Ibid.* XIX. ba-  
 sis AE baseos AB. XXI. basis AE diagonalem AC 196. XX. nu-  
 merus ad numerum 198. XXVII. magnitudo AB in fig. num.  
 IV. 200. XIII. qvales AF. *ib.* XIII. minus BF. 201. I. deleantur &  
 consequentia cum consequentibus. *Ibid.* V. & VI. lege, Com-  
 positio ergo perfecta rationum excessus, & perfecta divisio ra-  
 tionum defectus eodem &c. 202. XXI defectus. 207. XXII.  
 ut EA. 215. XVII. illa. 217. I. E ad C. 222. II. ΔΓ ad ΓΕ. *Ibid.*  
 XIII. post divisionem. nova linea. CAP. IX. 224. XII. factam. *ibid.*  
 XX. enim in figu. num. XI. 225. IV. ut ΔΓ ad ΓΕ. 226. II. ΑΓ ad  
 parallelogrammum. 231. XXVI. fig. num. XI. vectis. 233. XXV.  
 BACDLM semissem. *ibid.* XXVIII. Adeoque. 237. XIX. trian-  
 gularia LOK. *ibid.* XXV. prisma IOL. 238. II. oL. horizonti. 240.  
 XXVIII. seu GE. 241. I. rationem EG. *ibid.* XVII. GE ad BF. *ibid.*  
 XVIII. GE ad BE. 244. XX. aliquam 246. XIII. rationum. 248.  
 X. quæ fit addendo XV. Qvod. 253. XVI. bicubitale. *ibid.* XXVI.  
 τῷ ἐνί, 256. VII. Ἐκλογ. 258. VI. necessarium. 266. inter lin. XXII.  
 &

& XXIII. infere τῇ ΕΖ ἡ ΔΘ ἴση, καὶ ἡχθω ὑπο τῇ Δ τῇ ΓΘ πρὸς ὁρθωσῆς, ΔΚ, καὶ κείσθω. 269. XXIII. figura XVII. 285. XXVIII α γ β 289. XXIII. omni hac rationum. 292. inter XXI. & XXII infer. quamvis hæc potius de æqualitate duarum rationum rationis ab aliis explicetur. 301. XXI. deprehendit. 302. XXVII. rationem 81. 310. XX. fiatque æqualis. 325. XXI, & CD minor. 327. XXI. argumentis 389. VIII. ἡέσιν. 343. XIII. cognoscitur. 349. XXVI. sic 64. 350. II insipidum. XX tibi ipsi. 355. XIX. consequentis. 372. XXII. Scepticorum.

Cœtera si qua erunt, per te emendabis.  
Vale.







005643768



